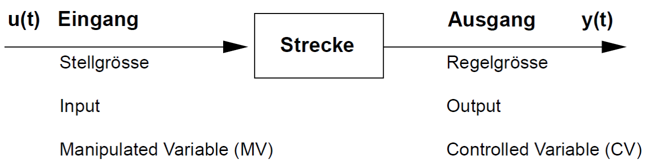
Regelsysteme Zusammenfassung

Andreas Biri, D-ITET 29.01.15

1. Einführung

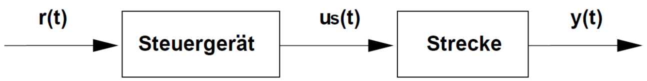
Strecke / "process": Maschine + Actuator + Sensors



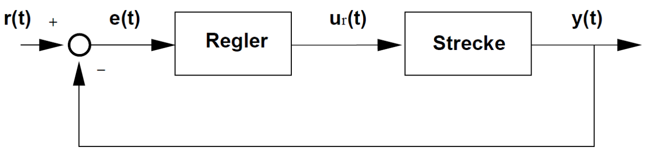
SISO: *Single Input / Single Output*
MIMO: *Multiple Input / Multiple Output*

Benötige für Steuerung gleich viele Inputs/Freiheitsgrade wie Outputs, um sie unabhängig steuern zu können

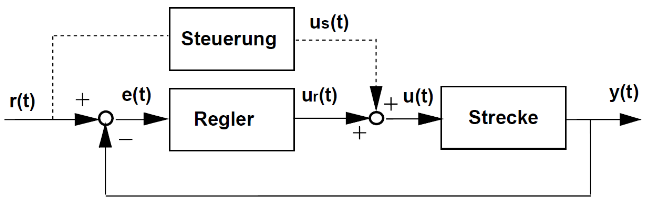
Steuerung: Ausgang unabhängig von aktuellem Output



Reglung (Feedback Control): Rückführung des Istwerts
Kompensation v. Unsicherheiten, bleibende Regelabweichung



Kombination Reglung & Steuerung



Steuerung: *Open Loop*, für schnelle & einfache Annäherung
Reglung: *Closed Loop*, Feineinstellung durch Rückkopplung

2. Modellierung dynam. Systeme

- *fundamental model*: basiert auf physikalischen Gesetzen
- *black box model*: Anpassen an experimentelle Daten

2.1 Mechanische Systeme

$$m * \ddot{x} = \sum_i F_i$$

Reibung / Dämpfung: $F = b * \dot{x}$

Feder: $F = k * x$

Gravitation: $F = -m * g$

$$I * \ddot{\theta} = F * d + M_D$$

I : Trägheitsmoment, M_D : Störmoment

Für Pendel: $I = m * l^2 \, , \omega = \sqrt{g/l}$

2.2 Elektrische Systeme

Capacitor: $i_C(t) = C \frac{d}{dt} u_C(t)$

Inductor: $u_L(t) = L \frac{d}{dt} i_L(t)$

Resistance: $u_R(t) = R * i_R(t)$

2.3 & 2.4 : Komplexere Systeme

Stelle Gleichungen für mechanischen & elektrischen Teil separat auf und löse Gleichungssystem

$$Akkumulation = Zufuhr - Abfuhr$$

Bernoulli-Gleichung für Flüssigkeiten (2 – 22)

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g h = const.$$

2.5 Linearisierung

$$f(x) \approx f(\bar{x}) + \frac{df}{dx} |_{x=\bar{x}} (x - \bar{x})$$

$$J = \frac{df}{dx^T} = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \cdots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_n}{dx_1} & \cdots & \frac{df_n}{dx_n} \end{pmatrix}$$

Linearisierung um einen stationären Betriebspunkt

$$\Delta\dot{x} = \frac{df}{dx^T} |_{\substack{x=x_s \\ u=u_s}} (x - x_s) + \frac{df}{du^T} |_{\substack{x=x_s \\ u=u_s}} (u - u_s) = F \, \Delta x + G \, \Delta u$$

$$\Delta y = \frac{dg}{dx^T} |_{\substack{x=x_s \\ u=u_s}} (x - x_s) + \frac{dg}{du^T} |_{\substack{x=x_s \\ u=u_s}} (u - u_s) = H \, \Delta x + J \, \Delta u$$

2.6 Zustandsraumdarstellung / Lösen v. DGS

$$\dot{x} = f(x,u) = Fx + Gu \, , \qquad \dot{y} = g(x,u) = Hx + Ju$$

$$x(t) = e^{F(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{F(t-\tau)} \, G \, u(\tau) \, d\tau$$

$$e^{Ft} = I + Ft + \frac{F^2 t^2}{2!} + \cdots \, , \qquad \frac{d}{dt} e^{Ft} = F * e^{Ft}$$

Schreibe Ableitungen von Variablen als neuen Zustand

$$x \, , \dot{x} \, , \ddot{x} \quad \rightarrow \quad x_1 = x \, , x_2 = \dot{x} \, , x_3 = \ddot{x}$$

3. Dynamisches System-Verhalten

Faltung mit Systemantwort

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) g(t-\tau)\, d\tau$$

Wenn System *kausal* (d.h. $g(t) = 0 \; \forall \; t < 0$)

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) g(t-\tau)\, d\tau \;, \qquad u(t) = 0 \; \forall \; t < 0$$

3.2 Laplace Transformation

$$F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_c + i\omega}^{\sigma_c - i\omega} F(s)\, e^{st}\, ds$$

$F(s)$	$f(t) \quad (t \geq 0)$	$F(s)$	$f(t) \quad (t \geq 0)$
1	$\delta(t)$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-at}$
$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a}(at - 1 + e^{-at})$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at} - e^{-bt}$
$\frac{2!}{s^3}$	t^2	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1 - at)e^{-at}$
$\frac{3!}{s^4}$	t^3	$\frac{a^2}{s(s+a)}$	$1 - e^{-at}(1 + at)$
$\frac{m!}{s^{m+1}}$	t^m	$\frac{(b-a)s}{(s+a)(s+b)}$	$be^{-bt} - ae^{-at}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin(at)$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$t \; e^{-at}$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$
$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2!} t^2 \; e^{-at}$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\cos(bt)$
$\frac{1}{(s+a)^m}$	$\frac{1}{(m-1)!} t^{m-1} \; e^{-at}$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\sin(bt)$
		$\frac{a^2+b^2}{s[(s+a)^2+b^2]}$	$1 - e^{-at}\left(\cos(bt) + \frac{a}{b}\sin(bt)\right)$

$F(s)$	$f(t)$	Bemerkung
$\alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$	$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$	Superposition
$\frac{1}{\lvert a \rvert} F\left(\frac{s}{a}\right)$	$f(at)$	Ähnlichkeitssatz
$F(s)e^{-s\lambda}$	$f(t-\lambda)$	Verschiebungssatz
$F(s+a)$	$e^{-at}f(t)$	Dämpfungssatz
$s^m F(s) - s^{m-1} f(0)$ $-s^{m-2} f'(0) - \cdots - f^{(m-1)}(0)$	$f^{(m)}(t)$	Differentiationssatz
$\frac{1}{s}F(s)$	$\int_0^t f(\zeta) d\zeta$	Integrationssatz
$-\frac{d}{ds}F(s)$	$tf(t)$	Produkt mit der Zeit
$\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$	$f(0^+)$	Satz vom Anfangswert
$\lim\limits_{s\to 0} sF(s)$	$\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$	Satz vom Endwert
$F_1(s)F_2(s)$	$f_1(t) \star f_2(t)$	Faltungssatz
$\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_c - j\infty}^{\sigma_c + j\infty} F_1(\zeta)F_2(s-\zeta)d\zeta$	$f_1(t)f_2(t)$	Produkt im Zeitbereich
$\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} Y(-j\omega)U(j\omega)d\omega$	$\int_0^\infty y(t)u(t)$	Parsevals Theorem

Endwertsatz / Anfangswertsatz

$$\lim_{s\to\infty} s\, F(s) = f(0^+) \;, \qquad \lim_{s\to 0} s\, F(s) = \lim_{t\to\infty} f(t)$$

Anwendbarkeit d. Endwertsatzes, falls folgendes erfüllt:

- Maximal ein Pol im Ursprung
- Realteil der (restlichen) Pole ist negativ

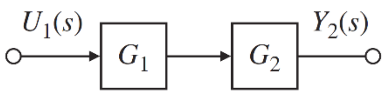
Partialbruchzerlegung: 3-17

mehrfache Pole: Koeffizienten durch Ableiten berechnen

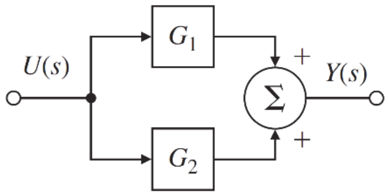
komplexe Pole: konjugiert komplexe Paare bilden

3.3 Blockdiagramme

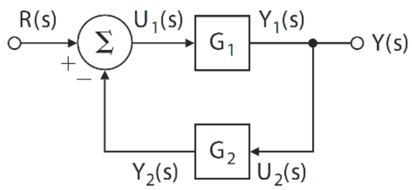
$$Y(s) = G(s)\, U(s)$$



$$Y_2 = G_2 G_1\, U_1$$

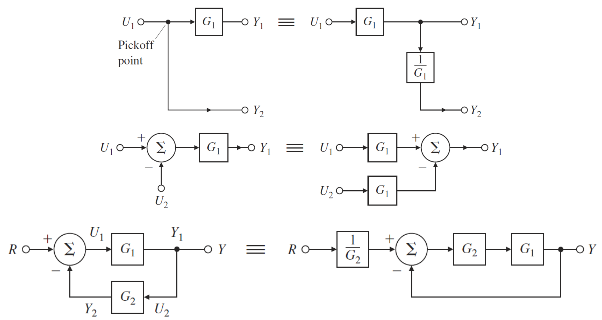


$$Y = (G_1 + G_2)\, U$$



$$Y_1 = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2} R$$

Umformungsregeln



3.4 Systemantworten

System 1. Ordnung (PT_1 Glied) 3-32

$$Y(s) = \frac{k}{\tau s + 1} U(s) \;, \qquad y(t) = \frac{k}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

k : Verstärkungsfaktor (*gain*)

τ : Zeitkonstante (*time constant*)

System 2. Ordnung (PT_2 Glied) 3-35

$$Y(s) = \frac{k}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} U(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} U(s)$$

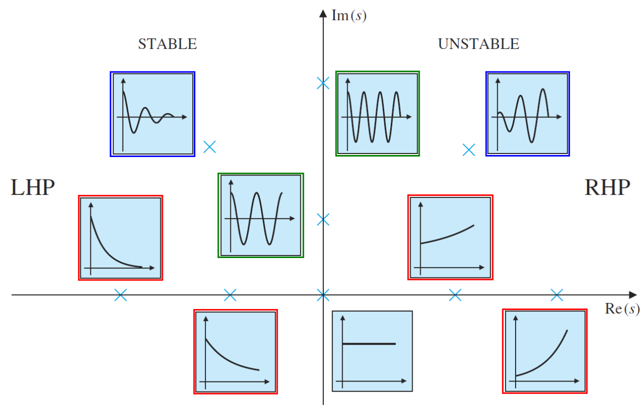
k :	Verstärkungsfaktor (*gain*)
$\tau = 1/\omega_n$:	Zeitkonstante (*time constant*)
ζ :	Dämpfungsfaktor (*damping factor*)
$\omega_n = 1/\tau$:	Natürliche Frequenz (*natural frequency*)

Charakteristische Gleichung: $\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1 = 0$

$$s_{1,2} = -\frac{1}{\tau}\left(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) = -\omega_n\left(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$$

$0 < \zeta < 1$:	Komplexe Wurzeln - gedämpft
$\zeta = 1$:	Doppelte Wurzel – kritisch gedämpft
$\zeta > 1$:	Reelle Wurzeln – überkritisch gedämpft

Impulsantworten in Abhängigkeit der Lage der Pole



Beziehung zw. Frequenz, Dämpfung u. Polstellen

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\, e^{-\frac{\zeta t}{\tau}} \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\frac{t}{\tau} + tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right)$$

$$s_{1,2} = -\omega_n\,\zeta \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} = -\sigma \pm i\,\omega_d$$

$$\sigma = \omega_n\,\zeta\,, \qquad \sin\theta = \frac{\sigma}{\omega_n} = \zeta\,, \qquad \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

$$Re\{\,s_{1,2}\,\} = \sigma\,, \qquad |s_{1,2}| = \omega_n\,, \qquad \sin\theta = \frac{Re\{\,s_{1,2}\,\}}{|s_{1,2}|}$$

Spezifikationen im Zeitbereich 3-42

Anstiegszeit (rise time): $t_r = \frac{1.8}{\omega_n}$

Anregelzeit (peak time): $t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$

Überschwingen (overshoot): $M_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$

Ausregelzeit (settling time): $t_s = \frac{4.6}{\zeta\omega_n} = \frac{4.6}{\sigma}$

Effekte zusätzlicher Pole/Nullstellen 3-44

Zus. NS in LHE : verstärkt Überschwingen

Zus. NS in RHE : unterdrückt Überschwingen
kann zu Unterschwingung führen

Zus. PS : verlängert Anstiegszeit

3.5 Stabilität

Asymptotisch stabil: alle internen Zustandsvariablen werden nie unendlich und gehen gegen Null mit $t \to \infty$.

Asymptotisch intern stabil genau dann, wenn *alle Pole des Systems in der offenen linken Halbebene (LHE)* liegen.

4. Systeme im Frequenzbereich

4.1 Frequenzgang

Eingangssignal: $\cos(\omega t) = Re\{\,e^{i\omega t}\,\}$

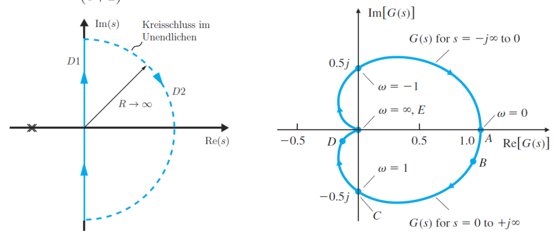
Systemantwort: $y(t) = Re\left\{ \int_0^t g(t-\tau)\, e^{i\omega\tau}\, d\tau \right\}$

$$= \underbrace{|G(i\omega)|}_{Amplitude\ Ratio} \cos\left(\omega t + \underbrace{\tan^{-1}\frac{Im(G(i\omega))}{Re(G(i\omega))}}_{Phase\ \phi} \right)$$

4.2 Nyquist-Diagramm

Real- & Imaginärteil der Übertragungsfunktion aufzeichnen
Wichtige Punkte ($\boldsymbol{\omega = 0, \omega = \pm i,\ \omega \to \infty}$) markieren
Kreisschluss $\lim_{R\to\infty} G(s = Re^{i\theta})$ eventuell aus Bode-Plot

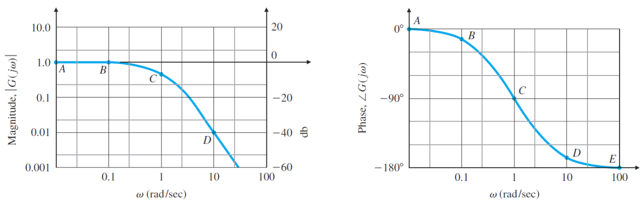
Beispiel: $G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$:



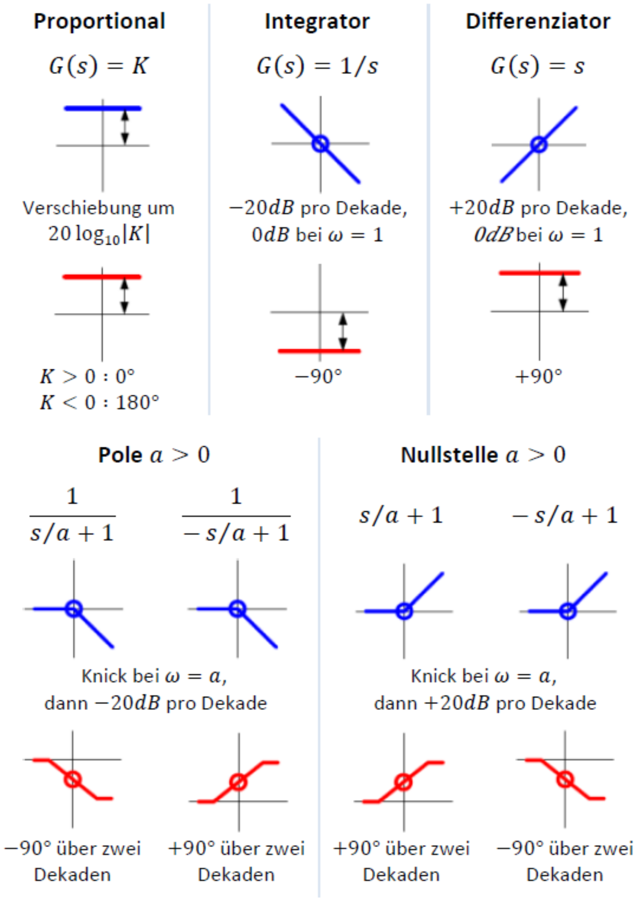
Nyquist-Diagramm ist symmetrisch bzgl. d. reellen Achse

Falls $Zählergrad < Nennergrad$: Kreisschluss im Unendlichen wird auf den Ursprung abgebildet

Bode: Betrag- und Phasengang separat auftragen



4.3 Bode-Diagramm 4-8 … 4-15



4.4 Nichtminimalphasige Systeme

minimalphasig: System G und Inverse G^{-1} **stabil & kausal**

1) Stabilität: Nullstellen und Polstellen in LHE

2) Kausalität: $g(t) = g_{inv}(t) = 0 \quad \forall\, t < 0$
Ausgänge nur v. aktuellem u. vergangenem Eingang abhängig

Nichtminimalphasige Systeme: Systeme mit **Totzeit**

$$G_D(s) = e^{-sT}\,, \qquad \angle G_D(j\omega) = -\omega T$$

5. Regelkreis – Rückführung & PID

5.1 Stationäres Verhalten

$$Y(s) = \frac{A}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)} V_a(s) + \frac{B}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)} W(s)$$

Steuerung mit $w = 0$: $v_a = Kr$

Wähle $K = \frac{1}{A}$; für $t \to \infty$ $y_{ss} = A\, v_a = r$

Reglung mit $w = 0$: $v_a = K(r-y) = K\, e$

Proportionalregler: $Y(s) = \frac{AK\, R(s) + B\, W(s)}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)+AK}$

Für $t \to \infty, w = 0$: $y_{ss} = \frac{AK}{1+AK} r \approx r$

Steuerung mit $w \neq 0$:

$y_{ss} = AKr + Bw = r + Bw\,,$ $\delta y = y_{ss} - r = Bw$

Reglung mit $w \neq 0$:

$$y_{ss} = \frac{AK}{1+AK} r + \frac{B}{1+AK} w \approx r$$

Reglung reduziert Auswirkung d. Störung um Faktor $1 + AK$,
Steuerung hat keinen Einfluss auf Störgrössenverhalten

5.2 Sensitivität

Annahme: Änderung der Verstärkung von A auf $A + \delta A$

$$S_A^T = \frac{\delta T}{T} \Big/ \frac{\delta A}{A} \approx \frac{A}{T}\frac{dT}{dA}$$

Steuerung: $S_A^{T_{ol}} = 1\,,$ Reglung: $S_A^{T_{cl}} = \frac{1}{1+AK}$

Reglung reduziert Auswirkung v. Änderungen im Verstärkungsfaktor um einen Faktor $1 + AK$

Dynamischer Fall mit Messrauschen: 5-8

5.3 Dynamisches Verhalten

Statisches K verändert Dynamik der Steuerung nicht
Statisches K verändert Dynamik der Reglung

$$Y(s) = \frac{AK\, R(s) + B\, W(s)}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)+AK}$$

$$s_{1,2} = \frac{-(\tau_1+\tau_2) \pm \sqrt{(\tau_1+\tau_2)^2 - 4\tau_1\tau_2(1+AK)}}{2\tau_1\tau_2}$$

$0 < K < \frac{(\tau_1-\tau_2)^2}{4\tau_1\tau_2 A}$: kürzere Anstieg- & kürzere Ausregelzeit

$K > \frac{(\tau_1-\tau_2)^2}{4\tau_1\tau_2 A}$: kürzere Anstiegszeit, schlechtere Dämpfung

$\Longrightarrow$ kleinerer stationärer Fehler, schlechteres Verhalten

5.4 Klassischer PID-Regler

Proportional-Integral-(PI)-Regler T_I Nachstellzeit

$$u(t) = K\left[e + \frac{1}{T_I}\int_{t_0}^{t} e(\eta)\, d\eta\right]$$

$$D(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_I\, s}\right)$$

Regler mit I-Anteil ist bleibender Regelfehler immer Null.

Proportional-Differential-(PD)-Regler T_D Vorhaltezeit

$$u = K(\, e + T_D\, \dot{e}\,)$$

$$D(s) = K\,(\,1 + T_D\, s)$$

Rasche Veränderungen führen zu grossen Ausschlägen
(empfindlich auf Messrauschen, regle nur Sollwert)

Proportional-Integral-Differential-(PID)-Regler

$$u(t) = K\left(e + \frac{1}{T_I}\int_{t_0}^{t} e(\eta)\, d\eta + T_D\, \dot{e}\right)$$

$$D(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_I\, s} + T_D\, s\right)$$

6. Stabilität

Asymptotisch intern stabil genau dann, wenn *alle Pole des Systems in der offenen linken Halbebene (LHE)* liegen.

Grenzstabil: Ein Pol im Ursprung / Paar auf imag. Achse

6.1 Stabilitätskriterium v. Routh / Hurwitz

Charakteristisches Polynom (normiert, s.d. $a_0 = 1$):

$$a(s) = s^n + a_1 * s^{n-1} + a_2 * s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} * s + a_n$$

Notwendige Bedingung für Stabilität: $a_i > 0$

Routh-Tableau: 6-4

$$\begin{array}{lll|c|llll}
\text{Row } n & & s^n: & 1 & a_2 & a_4 & \cdots \\
\text{Row } n-1 & & s^{n-1}: & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\
\text{Row } n-2 & & s^{n-2}: & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
\text{Row } n-3 & & s^{n-3}: & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
\quad\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\text{Row } 2 & & s^2: & \star & \star & & \\
\text{Row } 1 & & s^1: & \star & & & \\
\text{Row } 0 & & s^0: & \star & & &
\end{array}$$

$$b_k = -\frac{1}{a_1}\det\begin{bmatrix} 1 & a_{2k} \\ a_1 & a_{2k+1}\end{bmatrix}, \qquad c_k = -\frac{1}{b_1}\det\begin{bmatrix} a_1 & a_{2k+1} \\ b_1 & a_{2k}\end{bmatrix}$$

Falls erstes Element 0, ersetze durch ϵ_+ u. werte als $\epsilon_+ \to 0+$
Nullzeile → ersetze Zeile mit Ableitung d. darüber liegenden Zeile

Routh's Stabilitätskriterium

- Alle Wurzeln nur dann in offener LHE, wenn alle Elemente der ersten Kolonne positiv sind
- Anzahl Wurzeln in offener RHE ist gleich *der Anzahl von Vorzeichenänderungen* in der ersten Kolonne

Bedingungen für Stabilität: Gleichungen mit unbekannten Aufstellen, jedes Element d. ersten Kolonne muss positiv sein → mögliche Bereiche in der Ebene zeichnen

6.2 Nyquist-Stabilitätskriterium

Prinzip des Arguments

Geschlossene Kurve C, wird im Uhrzeigersinn umfahren

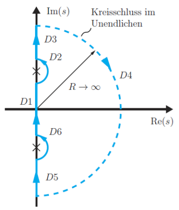
Abbildung von C **umkreist genau $N = Z - P$ mal Ursprung**

Z : Pole d. geschlossenen Kreises $\frac{KG(s)}{1+KG(s)}$ innerhalb C

P : Pole d. offenen Kreises $KG(s)$ innerhalb C

Wahl der D-Kurve: Pole auf imag. Achse umfahren

Nyquist D-Kurve:



Es sei:

Γ_F = Abbildung von D unter Rückführdifferenzfunktion $F(s) = 1 + KG(s)$

Z = Anzahl Nullstellen von $F(s)$ in RHE = Anzahl Pole des geschlossenen Kreises in RHE

P = Anzahl Pole der offenen Strecke $G(s)$ in offener RHE ⇒ bekannt

N = Gesamte Anzahl der Umkreisungen des Ursprungs im Uhrzeigersinn durch Γ_F ⇒ aus Nyquist-Diagramm (Umkreisungen gegen den Uhrzeigersinn werden negativ gezählt)

Der geschlossene Kreis ist stabil dann und nur dann wenn

$Z = 0$ oder $N = -P$

$\Longrightarrow$ Keine Pole in RHE: $Z = \#PS = 0 \quad \Leftrightarrow N = -\#NS$

Variante 1: $F(s) = 1 + KG(s) \rightarrow \quad KG(s) = F(s) - 1$

$\Longrightarrow$ Zähle Umkreisungen von -1 durch $KG(s)$

Variante 2: $\frac{F(s)}{K} = \frac{1}{K} + G(s) \rightarrow G(s) = \frac{F(s)}{K} - \frac{1}{K}$

$\Longrightarrow$ Zähle Umkreisungen von $-1/K$ durch $G(s)$

$\Longrightarrow$ Für Stabilität darf $-1/K$ nicht umkreist

$-1/K$ entweder links od. rechts d. Schnittpunkte des Bode-Plots mit der reellen Achse

Umdrehungen im Gegenuhrzeigersinn negativ zählen

Polstelle im Ursprung: 6-26, Kreis in RHE um Ursprung

$$\epsilon * e^{i\theta}, \qquad \epsilon \rightarrow 0, -90° \leq \theta \leq 90°$$

Mehrfache Polstelle im Ursprung: 6-33

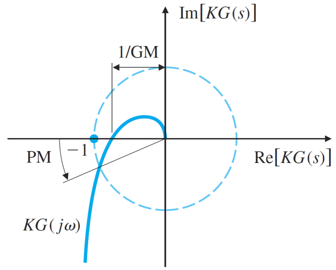
6.3 Bode-Stabilitätskriterium

Sei offener Regelkreis stabil, Amplitude und Phase *stetig* abnehmend. Geschlossener Regelkreis stabil iff

$$|KG(i\omega)| < 1 \quad wo \quad \angle G(i\omega) = -180°$$

Small Gain Theorem: stabil, wenn $|KG(i\omega)| < 1 \quad \forall \, \omega$

Amplituden- & Phasenreserve (GM & PM)



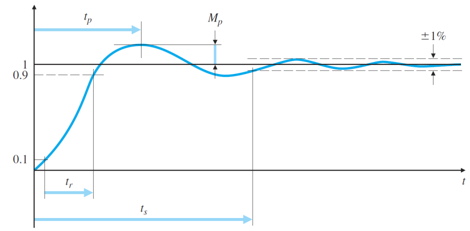
Gain Margin (GM): Faktor, um den der Betrag $|KG(i\omega_u)|$ kleiner ist als 1, wenn $\angle G(i\omega_u) = -180°$

Phase Margin (PM): Betrag, um den die Phase grösser ist als $-180°$, wenn $|KG(i\omega_c| = 1$

GM und PM sind nur für open-loop stabile Systeme definiert und sind ein Mass für die Stabilität des Systems

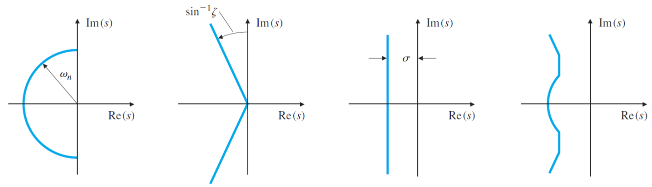
7. Reglerentwurf im Zeitbereich

7.1 Spezifikationen im Zeitbereich 7-4



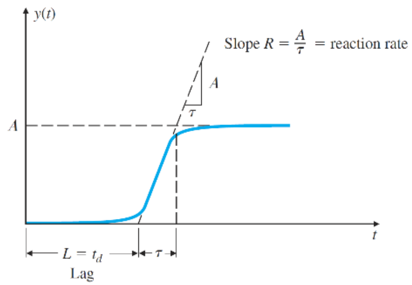
$$Anstiegszeit: \ t_r = \frac{1.8}{\omega_n}, \qquad Anregelzeit: \ t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$Überschwingen: \ M_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}, \qquad Ausregelzeit: \ t_s = \frac{4.6}{\sigma}$$



7.2 Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols (Z&N)

Viele Prozesse haben eine Sprungantwort der Form



$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{A \, e^{-t_d s}}{\tau s + 1}$$

Ziel: $decay \ ration = 0.25 \quad \Leftrightarrow \quad \zeta = 0.21$

Optimale Regler-Parameter

Proportional	$K = 1/(RL)$
PI	$K = 0.9/(RL)$, $T_I = L/0.3$
PID	$K = 1.2/(RL)$, $T_I = 2L, T_D = 0.5\,L$

Schwingmethode 7-8
Beim Regelkreis mit P-Regler wird Verstärkung so langer erhöht, bis Stabilitätsgrenze erreicht wird bei K_u

$\Longrightarrow$ regelmässige Schwingung, Phase: $-180°$

$$K_u : ultimate\ gain\ , \qquad P_u : ultimate\ period$$

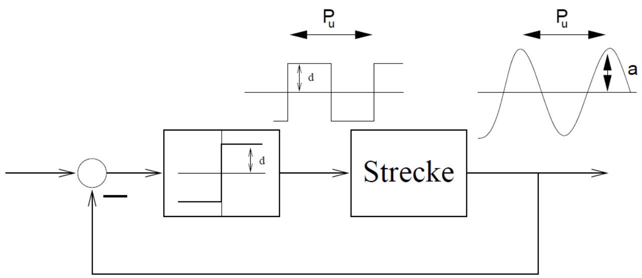
Optimale Regler-Parameter

Proportional	$K = 0.5\ K_u$
PI	$K = 0.45\ K_u\ , T_I = (1/1.2)\ P_u$
PID	$K = 0.6\ K_u\ , T_I = 1/2\ P_u\ , T_D = 1/8\ P_u$

7.3 Methode von Åström & Hagglund 7-11

2-Punkt Regler (Relais) startet Oszillation mit Amplitude *d*, Ausgang beginnt zu schwingen mit Amplitude *a*

$$K_u \approx \frac{4d}{\pi a} \quad , \qquad sodass\ \ K_u * AR \approx 1$$



8. Regelentwurf im Frequ.bereich

8.2 GM & PM als Entwurfskriterien

Annahme: System verhält sich wie System 2. Ordnung

$$\zeta \approx \frac{PM}{100}\ \ (PM < 70°)\ \rightarrow\ M_p = \exp\left[-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right]$$

Tracking Offset: je höher die Magnitude bei $\omega = 0$, desto geringer ist bleibende Regelabweichung auf Schritt/Rampe

Reaktionsgeschwindigkeit: Anstiegs-, Anregel- und Ausregelzeit sind positiv korreliert mit der Bandbreite

8.3 Betrag/Phase Gesetz nach Bode

Für ein stabiles, minimalphasiges System gilt:

$$\angle G(i\omega) = f(\,|G(i\omega)|\,)$$

Spezialfall: Falls Steigung von $|G(i\omega)|$ konstant (n) über etwa eine Dekade, dann

$$\angle G(i\omega) \approx n * 90°$$

8.4 Dynamische Kompensatoren

PD-Kompensation 8-13

$$D(s) = K(\,T_D s + 1)$$

- bietet Phasenvoreilung
- Wähle $\frac{1}{T_D} \approx \omega_c$, um PM zu verbessern

Nachteile:
- Verstärkung von Messrauschen für hohe Frequenzen
- idealer Differentiator nicht realisierbar

$\Longrightarrow$ Lead-Kompensator als Alternative

Lead-Kompensation 8-14
erhöht Phasenreserve PR u. verringert Überschwingen

$$D(s) = K\ \frac{Ts\ +1}{\alpha\, Ts\ +1}\ , \qquad \alpha < 1$$

Maximale Phasenanhebung: $\varphi_{max} = \arcsin\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$

bei $\omega_{max} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$ (platziere nahe bei Durchtrittsfreq. ω_c)

Vorgehen

1. Wähle K gross genug entsprechend Spezifikationen
2. Ermittle unkomp. PR_{ist} d. offenen Strecke $KG(s)$
3. Berechne notwend. PR_{soll} d. offenen Strecke $D(s)G(s)$
4. $\varphi_{max} = PR_{soll} - PR_{ist}\ \rightarrow\ \alpha = \frac{1-\sin\varphi_{max}}{1+\sin\varphi_{max}}$
5. Wähle $T \in \left[\frac{1}{\omega_c}, \frac{1}{\alpha\omega_c}\right]\ \rightarrow\ T = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\,\omega_c}$

PI-Kompensation 8-20

$$D(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_I\, s}\right)$$

- reduziere Regelabw. durch Verstärkung kleiner Frequ.
$\Longrightarrow$ Lag-Kompensator als Alternative

Lag-Kompensator 8-21
Verbesserung der bleibenden Regelabweichung

$$D(s) = \beta\ \frac{Ts+1}{\beta\, Ts\ +1}\ , \qquad \beta > 1$$

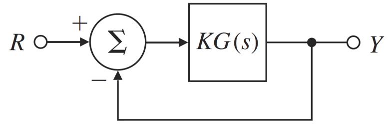
Wähle $\beta = \frac{K_{soll}}{K_{ist}\ G(0)}$; T : $\frac{1}{T} \leq \frac{\omega_c}{10}$

PID-Kompensation 8-25

$$D(s) = \frac{K}{s}\left[(T_D s + 1)\left(s + \frac{1}{T_I}\right)\right]$$

9. Erweiterung d. Reglerstruktur

9.1 Closed loop: Regelgüte über Bandbreite



Geschlossener Regelkreis

$$\frac{Y}{R} = T = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}\,, \qquad \frac{E}{R} = S = \frac{1}{1+KG(s)}$$

Sensitivity : $S \approx 0$, Complimentary Sensitivity : $T \approx 1$

$$S + T = 1\,, \quad \omega_B < \omega_c < \omega_{BW}$$

9.2 Bandbreitenbeschränkung durch nichtminimalphasige Elemente

Totzeitglied: $e^{-s\lambda}$, $\lambda : Totzeit$

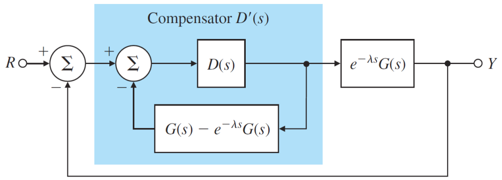
Für Systeme mit Totzeit λ ist erreichbare Bandbreite ω_B:

$$\omega_B < \omega_c \leq 4/\lambda$$

Für Systeme mit einer Nullstelle $\frac{1}{T}$ in der RHE gilt:

$$\omega_B \leq \omega_c \leq \frac{2}{T}$$

9.3 Totzeitkompensator



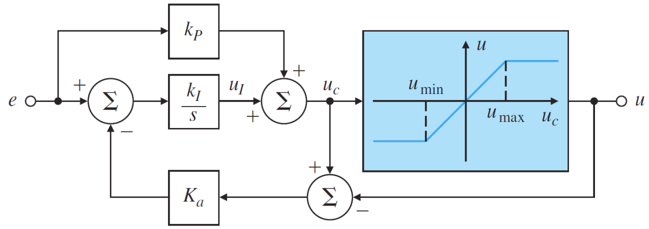
$$\frac{Y}{R} = \frac{D(s)\,G(s)}{1+D(s)G(s)}\,e^{-\lambda s}$$

Totzeit immer noch präsent, erscheint jedoch nicht in der charakt. Gleichung $1 + D(s)G(s)$, d.h. nicht im Regelkreis

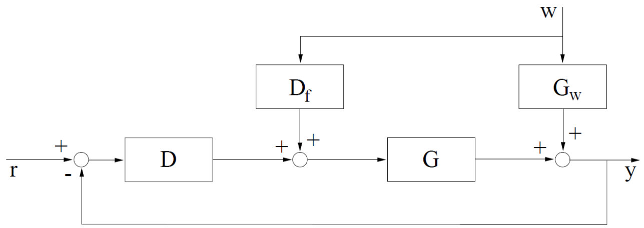
9.4 Antiwindup

Problem: Wenn u sättigt, kann u_c beliebig gross integriert werden

Lösung: Integrator abschalten, sobald u sättigt



9.5 Störgrössenaufschaltung (Feedforward Control)



Beginne bereits zu regeln, bevor Störung eintritt

Störgrössenaufschaltung D_f reagiert bereits vor Änderung

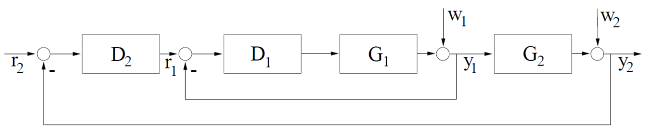
$$y = \frac{DG}{1+DG}\,r + \frac{D_F G + G_w}{1+DG}\,w \quad \Longrightarrow \quad D_f = -\frac{G_w}{G}$$

Bedingungen: w muss gemessen werden können

G darf keine Nullstellen in RHE haben oder eine grössere Totzeit als G_w, da dann D_f nicht realisierbar und stabil

Beispiele zu Approximationen: 9-23

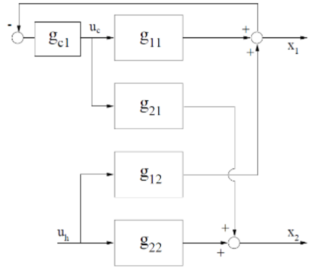
9.6 Kaskadenreglung



Störung wird schnell im inneren Regelkreis ausgeregelt, äusserer Regelkreis regelt y_2 mit Sollwert $y_1 \approx r_1$

10. Mehrvariablenreglung

10.4 Relative Gain Array als Kopplungsmass



$$m_{11} = m_{22} = \frac{g_{11}g_{22}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}$$

$$m_{12} = m_{21} = -\frac{g_{12}g_{21}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}$$

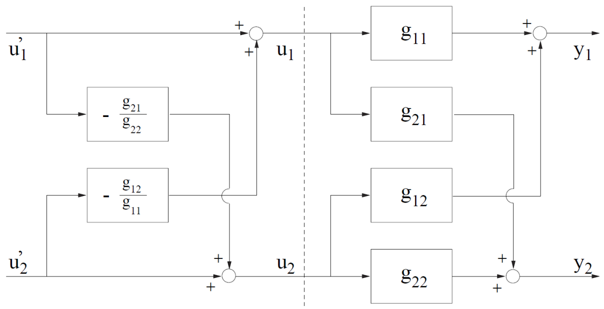
$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = (G^{-1})^T\, x\; G$$

$$wobei \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\sum_i m_{ij} = \sum_j m_{ij} = 1\;;\;\; x\ ist\ elementweise\ Multiplikation$$

10.5 Entkopplungskompensator

Nach Entkoppl.kompensator Anwendung v. Einschlaufenreglern



$$H = \begin{bmatrix} 1 & -g_{12}/g_{11} \\ -g_{21}/g_{22} & 1 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

$$y = GHu' = \begin{bmatrix} g_{11} - g_{12}g_{21}/g_{22} & 0 \\ 0 & g_{22} - g_{12}g_{21}/g_{11} \end{bmatrix}$$

H nicht eindeutig bestimmt → wähle **realisierbar/kausal**

11. Zustandsraumdarstellung

11.1 Übergang zwischen Laplace- u. Zustandsraumdarstellung

Zustandsraum → Laplace

$$\dot{x} = Fx + Gu\,, \qquad y = Hx + Ju$$

$$X = (sI - F)^{-1}\, G\, U\,, \qquad Y = [\, H\, (sI-F)^{-1}\, G + J\,]\, U$$

$$\Longrightarrow \;\; G(s) = H\,(sI-F)^{-1}\,G + J$$

Laplace → Zustandsraum

$$Y(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}\, s + b_n}{s^n + a_1\, s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, s + a_n}\, U(s)$$

Reglungsnormalform 11-5 , Blockdiagramm 11-7

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 \end{bmatrix} x$$

Beobachtungsnormalform 11-9 , Blockdiagramm 11-11

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & -a_n \\ 1 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Modalform 11-12 , Blockdiagramm 11-14

$$g(s) = \frac{c_1}{s - \lambda_1} + \frac{c_2}{s - \lambda_2} + \cdots$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} x$$

Jordansche Normalform: 11-15

Komplexe Pole: Betrachte Polpaar als System 2. Ordnung und stelle es in Reglungsnormalform dar

Mehrfache Pole: für jeden mehrfachen Pol Jordanblock

$$\frac{d}{(s-\lambda)^n} = \frac{c_1}{(s-\lambda)^1} + \frac{c_2}{(s-\lambda)^2} + \cdots + \frac{c_n}{(s-\lambda)^n}$$

$$\dot{x} \;=\; \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y \;=\; \begin{bmatrix} c_n & c_{n-1} & \cdots & c_2 & c_1 \end{bmatrix} x$$

Beispiel für Zusammenfügen von Jordanblöcken: 11-17

11.2 Zustandstransformation

Jede Darstellung einer ÜF kann in unendlich vielen Zustandsformen dargestellt werden; ändere Zustand:

$$A = T^{-1}FT\,, \qquad B = T^{-1}G\,, \qquad C = HT\,, \qquad D = J$$

Überführung in Normalform: finde $T^{-1} = [t_1, t_2, t_3]$

- Reglungsnormalform: 11-20
- Beobachtungsnormalform: 11-25
- Modalform: 11-29

Steuerbarkeit falls gilt: $\det C \neq 0$

$$C = [G \quad FG \quad F^2G \quad \ldots \quad F^{n-1}G\,]$$

Beobachtbarkeit falls gilt: $\det O \neq 0$

$$O = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}$$

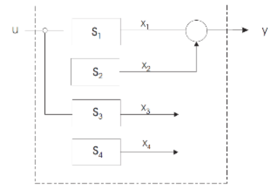
$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Pol/Nullstellenkürzung in } g(s) \\ \Longleftrightarrow \\ \text{Verlust der Steuerbarkeit oder Beobachtbarkeit im ZSR} \end{array}}$$

11.4 Zerlegung nach Kalman

Kann durch entsprechende Zustandstransformation jedes System in vier Untersysteme zerlegen, wobei nach ihrer Steuerbarkeit/Beobachtbarkeit eingeteilt wird:

$$\begin{array}{r} \mathrm{C,O}: \\ \mathrm{NC,O}: \\ \mathrm{C,NO}: \\ \mathrm{NC,NO}: \end{array} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 & 0 \\ 0 & F_{22} & 0 & 0 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ 0 & F_{42} & 0 & F_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \\ G_3 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$



11.5 Detektier- und Stabilisierbarkeit

detektierbar: alle Eigenwerte d. Matrizen F_{33} und F_{44} besitzen einen negativen Realwert

stabilisierbar: alle Eigenwerte d. Matrizen F_{22} und F_{44} besitzen einen negativen Realteil

11.6 Eigenwerte und Pole

Alle Pole der ÜF $G(s)$ sind Eigenwerte der Matrix F

Achtung: gilt wegen möglichen Kürzungen nicht umgekehrt

11.7 Nullstellen in Zustandsraumdarstellung

Annahme: $G(s)$ hat Nullstelle $z \rightarrow \; g(z) = 0$

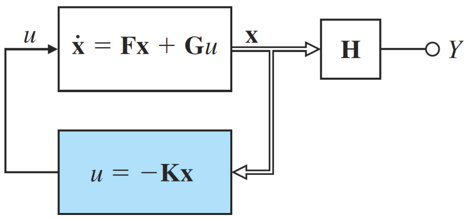
$$\Longrightarrow \quad u(t) = u_0\, e^{zt} \quad : \quad y(t) = 0\,, t > 0$$

Nullstellen der Übertragungsfunktion

$$\det \begin{bmatrix} zI - F & -G \\ H & J \end{bmatrix} = 0$$

12. Reglung im Zustandsraum

12.1 Zustandsrückführung



$$u = -Kx \quad \rightarrow \quad \dot{x} = Fx + Gu = (F - GK)\,x$$

Charakteristische Gleichung: wähle K, s.d. passende Pole

$$\det\big(\, sI - (\, F - GK\,)\big) = 0$$

Wahl von K, falls in Reglungsnormalform: 12-6

12.2 Referenzsystem

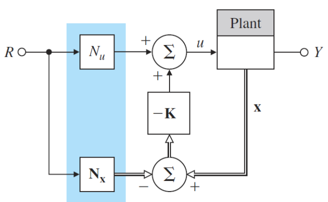
Berücksichtigung d. Sollwerts **r** bei Zustandsrückführung
Nachteil: stark modellabhängig (Verbesserung: Integral)

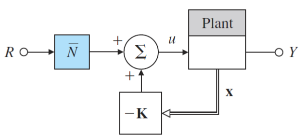
$$u = u_s - K(x - x_s) \quad \rightarrow \quad u = u_s \quad wenn\ x = x_s$$

Ansatz: $\quad x_s = N_x\, r\,, \qquad u_s = N_u\, r\,, \qquad y_s = r$

$$\Longrightarrow \qquad u \;=\; -Kx + \underbrace{(\, N_u + KN_x\,)}_{\bar{N}}\; r$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & G \\ H & J \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$





12.3 Integralreglung

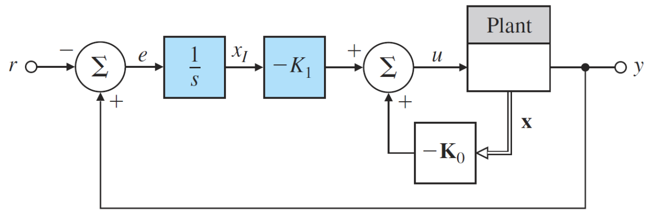
Zusätzlicher Zustand und Integralanteil:

$$x_I = -\int_0^t e\, dt\ , \qquad \dot{x} = Hx - r = -e$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & H \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r$$

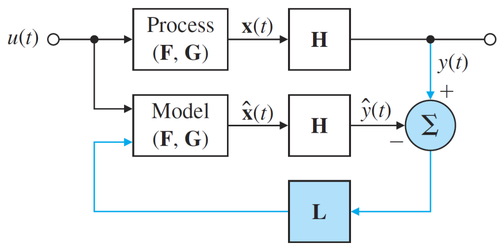
$$u = -[\, K_1 \quad K_0\,] \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow$ Mit charakteristischer Gleichung u. Polen K's finden



12.4 Zustandsschätzung

Zustandsrückführung schlecht möglich, weil Zustand oft nicht messbar; brauchen eine Schätzung des Zustandes



$$\dot{\hat{x}} = F\hat{x} + Gu + L(y - H\hat{x}\,) \;\rightarrow\; \dot{\epsilon} = (F - LH)\,\epsilon$$

Bestimmung von $L = [\, l_1 \quad l_2\,]^T$

$$\det[\, sI - (\, F - LH\,)\,] = chrarakt.Polynom$$

12.5 Dualität

Reglung: $\qquad$ Wähle K , s.d. $F - GK$ „gut“
Beobachter: $\quad$ Wähle L , s.d. $F - LH$ „gut“

Die Probleme Zustandsreglung/Beobachterentwurf sind mathematisch äquivalent oder dual

Regelung	Beobachter
F	F^T
G	H^T
K	L^T

12.6 Zustandsrückführung mit Beobachter

Benütze geschätzten Zustand in Zustandsreglung

$$\dot{x} = Fx - GK\hat{x} = Fx - GK(x - \epsilon)$$

Dynamik des Gesamtsystems getrennt entwickelt:

$$\det\big(sI - (\, F - GK)\big) * \det\big(\, sI - (\, F - LH)\big) = \alpha_c(s)\alpha_e(s) = 0$$

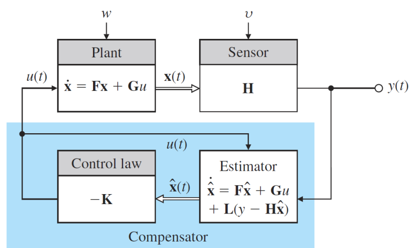
Separationsprinzip: *Menge der Pole des Gesamtsystems*

= Pole d. Zustandsreglers + Pole des Beobachters

Dynamischer Kompensator: Zustandsregler + Beobacher

$$\dot{\hat{x}} = (F - LH)\,\hat{x} + Gu + Ly\ , \qquad u = -K\,\hat{x}$$

$$D_c(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = -K\,(\, sI - F + GK + LH\,)^{-1}\, L$$



13. Optimale Reglung: LQR

Quadratische Kostenfunktion als Mass für Güte d. Reglers:

$$J = x^T(t_1)P_{t_1}x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \left[\underbrace{x^T(t)Q(t)x(t)}_{Fehlerquadrat} + \underbrace{u^T(t)R(t)u(t)}_{Stellgr.quadrat} \right] dt$$

Gewichtung des Endzustands: P_{t_1}
Gewichtung der Zustandstrajektorie: $Q(t)$
Gewichtung des Regleraufwands: $R(t)$

$$P_{t_1} = P_{t_1}^T \geq 0\,, \quad Q(t) = Q(t)^T \geq 0\,, \quad R(t) = R(t)^T > 0$$

$Q(t) \to \infty$: „teure“ Zustandsabw. , schnell zum Ursprung
$R(t) \to \infty$: „teure“ Regelaufw. , so wenig tun wie möglich

Lösung des Problems: lineare Zustandsrückführung

$$u^*(t) = -K(t)x(t)$$
$$K(t) = R^{-1}(t)G^TP(t)$$

Eigenschaft der Matrix $\boldsymbol{P(t)}$: 13-12

Matrix-Riccati-DGL: erfüllt $P(t_1) = P_{t_1}$ und

$$\dot{P}(t) = -F^TP(t) - P(t)F + P(t)G\,R(t)^{-1}G^TP(t) - Q(t)$$

13.3 Der zeitinvariante LQ-Regulator

Da $P(t)$ länger konstant ist, ist die Änderung gleich Null

Algebraische Matrix-Riccati-Gleichung (ARE)

$$\dot{P}(t) = 0 = -F^TP - P\,F + P\,G\,R^{-1}\,G^T\,P - Q$$

Opt. Regeleingang: $u^*(t) = -K\,x(t) = -R^{-1}G^TP\,x(t)$

Minimale Kostenfunktion: $J^* = x_0^T\,P\,x_0$

Stabilität garantiert, wenn $\left[\, Q^{\frac{1}{2}}, F \,\right]$ detektierbar ist

PM: stabil für $g(s) = e^{-j\phi}\,, -60° < \phi < 60°$
AM: stabil für $g(s) = k \quad , \quad \frac{1}{2} < k < \infty$

14. Optimale Schätzung: Kalman

Stochastisches Modell der Regelstrecke:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) + w(t)\,, \qquad y(t) = Hx(t) + v(t)$$

$w(t)$: *Prozessrauschen* mit Kovarianz $Q_e\,\delta(t-\tau)$
$v(t)$: *Messrauschen* mit Kovarianz $R_e\,\delta(t-\tau)$

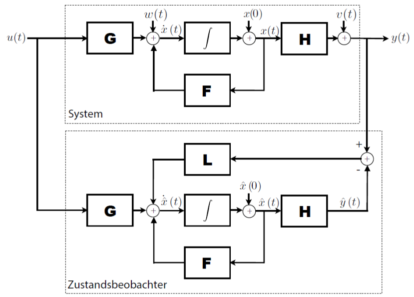
Suche *optimale Rückführungsmatrix* $L^*(t)$, sodass der mittlere quadratische Schätzfehler minimal ist

$$L^*(t) = P(t)\,H^T\,R_e^{-1}$$

Dabei erfüllt $P(t)$ erneut die Matrix-Riccardi-DGL:

$$\dot{P}(t) = F\,P(t) + P(t)\,F^T + Q_e - P(t)\,H^TR_e^{-1}H\,P(t)$$
$$P(0) = P_0 = E[\,\epsilon(0)\,\epsilon^T(0)\,] \quad , \qquad \epsilon = x - \hat{x}$$

Übliche Beobachterstruktur



14.3 Zeitinvariantes Kalman Filter

Für (H, F) detektierbar und $\left(F, Q_e^{\frac{1}{2}}\right)$ stabilisierbar:

$$0 = F\,P_\infty + P_\infty\,F^T + Q_e - P_\infty H^T\,R_e^{-1}\,H\,P_\infty$$

$$L_\infty^* = P_\infty\,H^T\,R_e^{-1}$$

- Optimalität: minimale Kovarianz des Schätzfehlers
- Erwartungstreue Schätzung $(\,E[\,\hat{x}\,] = E[x]\,)$

Kovarianzfunktionen Q_e, R_e oft als Tuningparamter

15. Verschiedenes

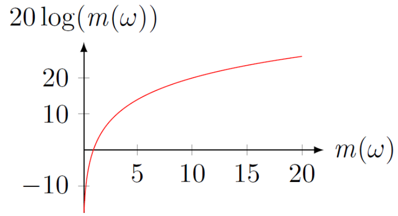
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Positiv definite Matrix

$$A \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^TA\,x \geq 0 \quad \forall\, x$$

Logarithmische Darstellung im Bode-Plot

$$M(\omega) = 20\log_{10} m(\omega) \quad [\mathrm{dB}]$$



$m(\omega)$	$M(\omega)$
0.01	−20 dB
1	0 dB
$\sqrt{2}$	3.01 dB
10	20 dB
100	40 dB

Für LQR und Kalman: symmetrische Annahme

$$P(t) = \begin{bmatrix} p_1(t) & p_2(t) \\ p_2(t) & p_3(t) \end{bmatrix}\,, \qquad p_{ii} \geq 0 \;\;, i = 1 \dots n$$

Kanonische Form/Normalform

Für kontrollierbare (con) und beobachtbare (obs) NF gilt:

$$F_{obs} = F_{con}^T\,, \qquad G_{obs} = H_{con}^T$$
$$H_{obs} = G_{con}^T\,, \qquad J_{obs} = J_{con}$$

Controllability-Matrix für Reglungsnormalform: $C = I_n$
Observability - Matrix f. Beobachtungsnormalform: $O = I_n$

16. Tables

$$i = \sqrt{1} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\tan' x = 1 + \tan^2 x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cos(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$$

$$\sin(z) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$$

Grad	Rad	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\tan\varphi$
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{1}{2}\pi$	1	0	
120°	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
150°	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
180°	π	0	-1	0

Additionstheoreme

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

Doppelter und halber Winkel

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi \qquad \sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos\varphi)$$

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \qquad \cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos\varphi)$$

$$\tan 2\varphi = \frac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi} \qquad \tan^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}$$

Umformung einer Summe in ein Produkt

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Umformung eines Produkts in eine Summe

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$$

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)$$

Reihenentwicklungen

$$e^x = 1 + x + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$$

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\operatorname{artanh} x = x + \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Summe der ersten n-Zahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Fourier-Korrespondenzen

$f(t)$	$\widehat{f}(\omega)$
e^{-at^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{-\omega^2}{4a}}$
$e^{-a\|t\|}$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$

Eigenschaften der Fourier-Transformation

Eigenschaft	$f(t)$	$\widehat{f}(\omega)$
Linearität	$\lambda f(t) + \mu g(t)$	$\lambda \widehat{f}(\omega) + \mu \widehat{g}(\omega)$
Ähnlichkeit	$f(at) \quad a > 0$	$\frac{1}{\|a\|}\widehat{f}(\frac{\omega}{a})$
Verschiebung	$f(t-a)$	$e^{-ai\omega}\widehat{f}(\omega)$
	$e^{ait}f(t)$	$\widehat{f}(\omega - a)$
Ableitung	$f^{(n)}(t)$	$(i\omega)^n \widehat{f}(\omega)$
	$t^n f(t)$	$i^n \widehat{f}^{(n)}(\omega)$
Faltung	$f(t) * g(t)$	$\widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega)$

Partialbruchzerlegung (PBZ)

Reelle Nullstellen n-ter Ordnung:

$$\frac{A_1}{(x - a_k)} + \frac{A_2}{(x - a_k)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x - a_k)^n}$$

Paar komplexer Nullstellen n-ter Ordnung:

$$\frac{B_1 x + C_1}{(x - a_k)(x - \overline{a_k})} + \dots + \frac{B_n x + C_n}{[(x - a_k)(x - \overline{a_k})]^n} +$$

$$(x - a_k)(x - \overline{a_k}) = (x - Re)^2 + Im^2$$

Laplace- Korrespondenz

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$\sigma(t)$	1	$H(t-a)$	$\frac{1}{s}e^{-as}$
1	$\frac{1}{s}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
t	$\frac{1}{s^2}$	te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$

Eigenschaften der Laplace-Transformation

Eigenschaft	$f(t)$	$F(s)$
Linearität	$\lambda f(t) + \mu g(t)$	$\lambda F(s) + \mu G(s)$
Ähnlichkeit	$f(at) \quad a > 0$	$\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$
Verschiebung im Zeitbereich	$f(t - t_0)$	$e^{-st_0}F(s)$
Verschiebung im Bildbereich	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
Ableitung im Zeitbereich	$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
	$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
	$f^{(n)}$	$s^nF(s) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0)s^{n-k-1}$
Ableitung im Bildbereich	$-tf(t)$	$F'(s)$
	$t^2 f(t)$	$F''(s)$
	$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$
Integration im Zeitbereich	$\int_0^t f(u)\,du$	$\frac{1}{s}F(s)$
Integration im Bildbereich	$\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^\infty F(u)\,du$
Faltung	$f(t) * g(t)$	$F(s) \cdot G(s)$
Periodische Funktion	$f(t) = f(t+T)$	$\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}\,dt$

Ableitungen

Potenz- und Exponentialfunktionen			Trigonometrische Funktionen		Hyperbolische Funktionen	
$f(x)$	$f'(x)$	Bedingung	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$	$\sin x$	$\cos x$	$\sinh x$	$\cosh x$
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{Z}_{<0},\ x \neq 0$	$\cos x$	$-\sin x$	$\cosh x$	$\sinh x$
x^a	ax^{a-1}	$a \in \mathbb{R},\ x > 0$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\log x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
e^x	e^x		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
a^x	$a^x \cdot \log a$	$a > 0$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Stammfunktionen

$f(x)$	$F(x)$	Bedingung	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$	$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$	$\sin(\omega t)\sin(\omega t)$	$\frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega}$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$n \in \mathbb{Z}_{\leq -2},\ x \neq 0$	$\tan x$	$-\log\lvert\cos x\rvert$	$\sin(\omega t)\cos(\omega t)$	$-\frac{\cos(2\omega t)}{4\omega}$
x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$	$a \in \mathbb{R},\ a \neq -1,\ x > 0$	$\tanh x$	$\log(\cosh x)$	$\sin(\omega t)\sin(n\omega t)$	$\frac{n\cos(\omega t)\sin(n\omega t)-\sin(\omega t)\cos(n\omega t)}{\omega(n^2-1)}$
$\log x$	$x\log x - x$	$x > 0$	$\sin^2 x$	$\frac{1}{2}(x - \sin x\cos x)$	$\sin(\omega t)\cos(n\omega t)$	$\frac{n\sin(\omega t)\sin(n\omega t)+\cos(\omega t)\cos(n\omega t)}{\omega(n^2-1)}$
e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax}$	$a \neq 0$	$\cos^2 x$	$\frac{1}{2}(x + \sin x\cos x)$	$\cos(\omega t)\sin(n\omega t)$	$\frac{\sin(\omega t)\sin(n\omega t)+n\cos(\omega t)\cos(n\omega t)}{\omega(1-n^2)}$
a^x	$\frac{a^x}{\log a}$	$a > 0,\ a \neq 1$	$\tan^2 x$	$\tan x - x$	$\cos(\omega t)\cos(n\omega t)$	$\frac{\sin(\omega t)\cos(n\omega t)+n\cos(\omega t)\sin(n\omega t)}{\omega(1-n^2)}$

Standard-Substitutionen

Integral	**Substitution**	**Ableitung**	**Bemerkung**
$\int f(x,\ x^2+1)\,dx$	$x = \tan t$	$dx = \tan^2 t + 1\,dt$	$t \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$
$\int f(x,\ \sqrt{ax+b})\,dx$	$x = \frac{t^2-b}{a}$	$dx = \frac{2}{a}t\,dt$	$t \geq 0$
$\int f(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$	$x + \frac{b}{2a} = t$	$dx = dt$	$t \in \mathbb{R}$, quadratische Ergänzung
$\int f(x,\ \sqrt{a^2-x^2})\,dx$	$x = a\sin t$	$dx = a\cos t\,dt$	$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2},\ 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$
$\int f(x,\ \sqrt{a^2+x^2})\,dx$	$x = a\sinh t$	$dx = a\cosh t\,dt$	$t \in \mathbb{R},\ 1 + \sinh^2 x = \cosh^2 x$
$\int f(x,\ \sqrt{x^2-a^2})\,dx$	$x = a\cosh t$	$dx = a\sinh t\,dt$	$t \geq 0,\ \cosh^2 x - 1 = \sinh^2 x$
$\int f(e^x,\ \sinh x,\ \cosh x)\,dx$	$e^x = t$	$dx = \frac{1}{t}\,dt$	$t > 0,\ \sinh x = \frac{t^2-1}{2t},\ \cosh x = \frac{t^2+1}{2t}$
$\int f(\sin x,\ \cos x)\,dx$	$\tan\frac{x}{2} = t$	$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$	$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$