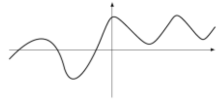
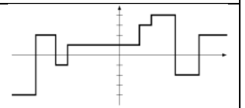
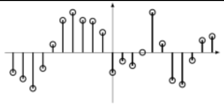
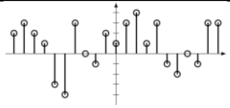
SigSys I Zusammenfassung

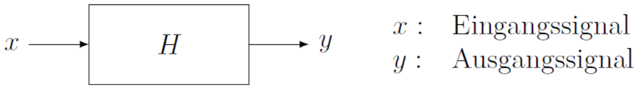
Andreas Biri, D-ITET 12.01.14

1. Einteilung der Signale

Zeit / Amplitude	kontinuierlich	diskret
Kontinuierlich		
diskret		

Zeit- & amplitudendiskret -> **digital**

2. Systemeigenschaften



Linearität

$$Homogenität: \quad H(\alpha x) = \alpha H x$$
$$Additivität: \quad H(x_1 + x_2) = Hx_1 + Hx_2$$

Nullraum

$$N(H) = \{ x \in X : Hx = 0 \}$$

Bildraum

$$R(H) = \{ y = Hx : x \in X \}$$

Superposition

$$H(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 H x_1 + \dots + \alpha_n H x_n$$

Achtung: gilt bei unendliche Summe nur bei stetiger Funktion!

Stetigkeit dann und nur dann, wenn

$$H\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i H x_i$$

Zeitinvarianz

zeitliche Verschiebung am Eingang führt zu einer ebenso grossen zeitlichen Verschiebung am Ausgang

$$H\big(x(\cdot - \tau)\big) = (Hx)(\cdot - \tau) \qquad \tilde{x}(t) = x(t-\tau) \rightarrow y(t-\tau)$$

Kausalität

Ausgangssignal hängt ausschliesslich von vergangenen und/oder momentanen Werten ab

$$x_1(t) = x_2(t)\ \forall\, t \le T \ \rightarrow\ (Hx_1)(t) = (Hx_2)(t)\ \forall\, t \le T$$

BIB0-Stabilität

$$bounded\ input \rightarrow bounded\ output$$

3. LTI-Systeme im Zeitbereich

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = x * h$$

Impulsantwort: $h(t) = (H\delta)(t), \quad \delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$

Sprungantwort: $(h * \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, \sigma(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau$

Faltungseigenschaften

Kommutativ: $x_1 * x_2 = x_2 * x_1$

Assoziativ: $(x_1 * x_2) * x_3 = x_1 * (x_2 * x_3)$

Distributiv: $x_1 * (x_2 + x_3) = x_1 * x_2 + x_1 * x_3$

Graphische Faltung

1. $h(\tau)\, spiegeln\ um\ \tau = 0$
2. $gespiegeltes\ h(\tau)\ verschieben\ nach \begin{cases} rechts, & t > 0 \\ links, & t < 0 \end{cases}$
3. $verschobenes\ h'(\tau)\ mit\ x(\tau)\ multiplizieren$
4. $Integrieren\ \ (benütze, dass\ oft\ h'(\tau) * x(\tau) = 0\,)$

Zeitinvarianz

$$\exists\, h \implies \boldsymbol{L}inear\boldsymbol{T}ime\boldsymbol{I}nvariant - System \implies zeitinvariant$$

Kausalität bei LTI-System, wenn

$$h(t) = 0 \qquad \forall\, t < 0$$

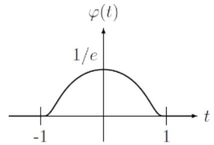
Stabilität

$$h \in L^1, d.h. \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty \quad \rightarrow \quad BIBO - stabil$$

4. Verallgemeinerte Funktionen

Testfunktion

$$x(\xi) = \int_a^b x(t)\varphi(t) dt \qquad , \xi \in [a, b]$$



Eichvorschrift: $\int_a^b \varphi(t)\, dt = 1$

Funktional (S.24)

$$l_x(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \varphi(t)\, dt$$

regulär: $\exists\, x(t)\ stückweise\ stetig, s.d. \quad l_x(\varphi) = l(\varphi)$

singulär: sonst

$$(l + \tilde{l})(\varphi) = l(\varphi) + \tilde{l}(\varphi) \qquad \rightarrow l_{x_1 + x_2}(\varphi) = l_{x_1}(\varphi) + l_{x_2}(\varphi)$$

$$l_{\alpha x}(\varphi) = (\alpha l_x)(\varphi) = \alpha l_x(\varphi) \qquad \rightarrow (\alpha l)(\varphi) = \alpha l(\varphi)$$

$$l_{x_1 x_2}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(t) \varphi(t)\, dt = l_{x_1}(x_2 \varphi) \qquad \rightarrow (xl)(\varphi) = l(x\varphi)$$

$$(l \circ g)(\varphi) = \frac{1}{|a|}\, l\left(\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right) \qquad für\ g(t) = a * t + b$$

Gerade verallgm. F.: $\forall\, \varphi: \ l(\varphi) = l(\vartheta), mit\ \vartheta(t) = \varphi(-t)$

Ungerade ver. F.: $\forall\, \varphi: \ l(\varphi) = -l(\vartheta), mit\ \vartheta(t) = \varphi(-t)$

Deltafolge

$$\delta_n(t) = \begin{cases} \geq 0\ , & t \in I_n = [a_n, b_n] \\ = 0\ , & t \notin I_n \end{cases}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(t)\, dt = 1$$

Deltafunktion

$$l_\delta(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)\, dt = \varphi(0)$$

Rechenregeln

Eichvorschrift: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$

Produkt: $\boldsymbol{x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)}$

Siebeigenschaft: $\boldsymbol{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\varphi(t)dt = \varphi(t_0)}$

$\boldsymbol{(\delta * h)(t) = h(t)}$

Verschiebung: $\delta(at+b) = \frac{1}{|a|}\,\delta\left(t + \frac{b}{a}\right)$

Gerade Funktion: $\delta(t) = \delta(-t),\ \delta(t-t_0) = \delta(t_0 - t)$

Faltung verallgemeinerter Funktionen

$$\left(l_{x_1} * l_{x_2}\right)(\varphi) = l_{x_1}(x_2(-\cdot) * \varphi)$$
$$(x * \varphi)(t) = l_x\big(\varphi(t-\cdot)\big) = l_x(\varphi_t)$$

$$(l_\delta + l_x) = l_x(\varphi) \rightarrow (\delta * x)(t) = x(t)$$

Differentiation verallgemeinerter Funktionen (S.32)

$$D l_x(\varphi) = l_{x'}(\varphi) = -l_x(\varphi')$$
$$D\, l(\varphi) = l'(\varphi) = -l(\varphi')$$

Produktregel: $(xl)'(\varphi) = x'l(\varphi) + xl'(\varphi)$

Additivität: $\left(l + \tilde{l}\right)'(\varphi) = l'(\varphi) + \tilde{l}'(\varphi)$

$$D^n\, l(\varphi) = l^{(n)}(\varphi) = (-1)^n\, l\left(\varphi^{(n)}\right)$$
$$D^n\, l_x(\varphi) = l_{x^{(n)}}(\varphi)$$

$$Dx(t) = x'(t) + \left(x(t_0^{+}) - x(t_0^{-})\right)\delta(t-t_0)$$

Deltafunktional: $l'_\delta(\varphi) = -\varphi'(0)$

Sprungfunktion: $D\,\sigma(t) = \delta(t)$

5. LTI-Systeme im Frequenzbereich

LTI-System mit absolut integrierbarer Impulsantwort (S.37)

→ stationärer Zustand aus Einschaltvorgang eines sinusförmigen Eingangssignals

$$y(t) \xrightarrow{t\to\infty} \hat{h}(f)\, e^{2\pi i f t}$$

Fouriertransformation

$$\hat{x}(f) = (Fx)(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-2\pi i f t}\, dt$$

$$x(t) = \left(F^{-1}\hat{f}\right)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f)\, e^{2\pi i f t}\, dt$$

Rechenregeln

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(u)\,\hat{\varphi}(u)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(u)\,\varphi(u)\, du$$
$$l_x(F\varphi) = l_{F\,x}(\varphi)$$

$$F\, l(\varphi) = l(F\varphi)$$
$$F^{-1}\, l(\varphi) = l(F^{-1}\varphi)$$

$$(F^2 x)(f) = x(-f)$$
$$\left((F^{-1})^2\,\hat{x}\right)(t) = \hat{x}(-t)$$

$$F\,x' = 2\pi i\, f\, \hat{x}$$
$$\big(F(x*y)\big)(f) = \hat{x}(f)\hat{y}(f)$$

Sprungfunktion transformiert

$$\delta(t) = F\,1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i t f}\, df \ \leftrightarrow\ F^{-1}\delta = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f) e^{2\pi i t f}\, df = 1$$

Periodische Signale an LTI-Systemen

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{2\pi i k t/T} \rightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, \hat{h}\left(\frac{k}{T}\right) e^{2\pi i k t/T}$$

Poisson'sche Summenformel

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t-kT) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{h}\left(\frac{k}{T}\right) e^{2\pi i k t/T}$$

Anwendung der Fouriertransformation auf LTI-Systeme

Absolut integrierbar: $\left|\hat{h}(f)\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt\,, \ \lim_{|f|\to\infty} \hat{h}(f) = 0$

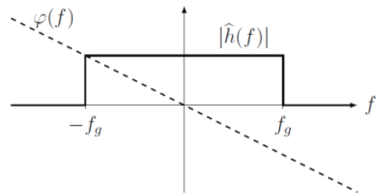
Riemann-Lebesgue: $\hat{h}\ unstetig \rightarrow h \notin L^1 \rightarrow NICHT\ BIBO-stabil$

Verzerrungsfreies System (formgetreue Übertragung)

$$y(t) = k\, x(t-t_0)\ ;\ h(t) = k\,\delta(t-t_0)$$

Idealisierter Tiefpass (S.46)

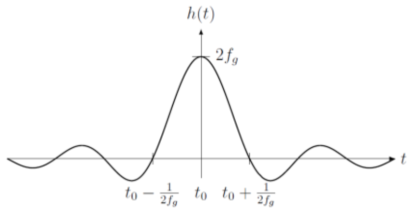
Frequenzgang



$$|\hat{h}(f)| = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_g \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\varphi(f) = -2\pi f t_0$$

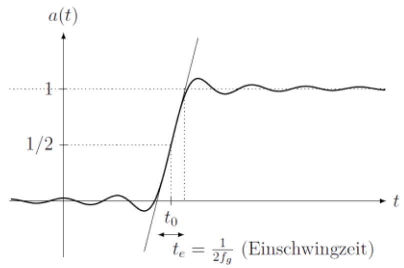
Impulsantwort



$$h(t) = 2f_g \frac{\sin(2\pi f_g(t-t_0))}{2\pi f_g(t-t_0)}$$

System ist weder kausal noch BIBO-stabil (H(f) ist unstetig)

Sprungantwort



Tangente mit maximaler Steigung $2f_g$ bei $t = t_0$

- maximale Steigung ist proportional zur Grenzfrequenz
- Tiefpass mit höherer Grenzfrequ. kann Signaländerung schneller folgen

Kausal machen: h(t) nach rechts verschieben und für $t < 0$ zu Null setzen

Stabil machen: Kanten von h(t) abschrägen, dh. falten mit Rechteck

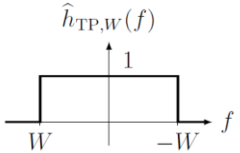
Bandbegrenzte Signale (S.48)

Bandbreite von x ist kleinstes W, s.d.

$$\left(x * h_{TP,W} \right)(t) = x(t) \;\; \forall\, t$$

$$\hat{x}(f)\, \hat{h}_{TP,W}(f) = \hat{x}(f) \quad \forall\, f$$

$$\hat{h}_{\mathrm{TP},W}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \le W \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$



Bernstein-Ungleichung

Signale mit kleiner Bandbreite nur langsame Änderungen im Zeitbereich

$$x(t) = \int_{-W}^{W} g(f)\, e^{2\pi i f t}\, df\,, g \in L^1 \Longrightarrow \left|\frac{dx(t)}{dt}\right| \le 4\pi W \max_{\tau \in \mathbb{R}} |x(\tau)|$$

6. Abtasttheoreme

Periodisches Signal

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{2\pi i k t/T}\;, \qquad c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{-2\pi i k t/T}\, dt$$

$$\hat{x}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, \delta\left(f - \frac{k}{T}\right), \quad f_0 = \frac{1}{T}$$

Abtastung (S.52)

Zeitliches Abtasten ergibt ein periodisches Spektrum, das durch periodische Wiederholung des ursprünglichen Spektrums F(f) entsteht

im Zeitbereich

$$x(t) \cdot \delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) * \delta(t - kT)$$

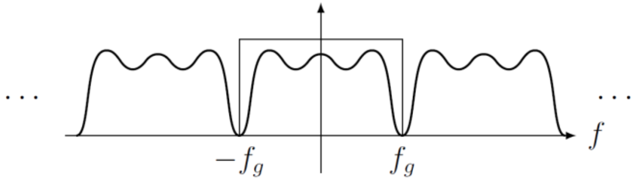
$$\left(F(x \cdot \delta_T) \right) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Im Spektrum/Frequenzbereich

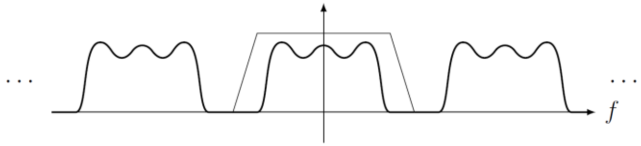
$$\hat{x_s}(f) = \hat{x}(f) \sum_{-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}\left(\frac{k}{T}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

$$x_s(t) = T \cdot \left(x * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\cdot - kT) \right)(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT)$$

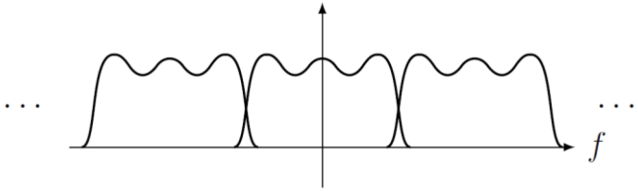
Kritische Abtastung : $f_s = 2\, f_g \quad (Niquist)$



Überabtastung : $f_s > 2\, f_g$



Unterabtastung : $f_s < 2\, f_g$ *(Aliasing)*



Rekonstruktion mit idealem Tiefpassfilter

$$H_{TP} \;\; : Grenzfrequenz\; f_g, Amplitude\; T$$

Shanon-Theorem

Ein f_g-bandbegrenztes Signal kann aus seinen Abtastwerten eindeutig rekonstruiert werden, falls $f_s \;\ge 2\, f_g$.

Abtastfrequenz : $\boldsymbol{f_s = \frac{1}{T}}$

Niquistrate: $f_s = 2\, f_g$

Rekonstruktion möglich, falls $\qquad x(t) = 0 \qquad \forall\, |t| > \frac{T}{2}$

Interpretation als Interpolation (S.55)

$$y(t) = x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\, \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}\,(t - kT)\right)}{\frac{\pi}{T}\,(t - kT)}$$

7. Zeitdiskrete Signale & Systeme

$$\hat{x}_d(\theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_d[l]\, e^{-2\pi i l \theta} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}\left(\frac{\theta - k}{T}\right)$$

Zeitdiskrete Fouriertransformation

$$\hat{x}_d(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d[n]\, e^{-2\pi i n \theta}\,, \quad \theta = f\,T = \frac{f}{f_s} \;\in [0{,}1]$$

Rücktransformation:

$$x_d[n] = \int_0^1 \hat{x}_d(\theta)\, e^{2\pi i n \theta}\, d\theta$$

Zeitdiskretes System ist LTI, falls

Linearität: $\quad H(x_1 + x_2) = Hx_1 + Hx_2\,,\; H(\alpha x) = \alpha H x$

Zeitinvarianz: $H(x[\cdot - n_0]) = (Hx)[\cdot - n_0]$

Impulsantwort

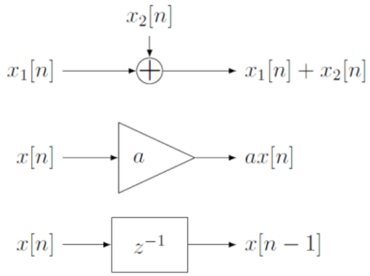
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, \delta[\,n - k] \quad , \qquad \delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n - k]$$

Differenzengleichung (S.60)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m\, x[n-m]$$

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} -\frac{a_k}{a_0}\, y[n-k] + \sum_{m=0}^{M} \frac{b_m}{a_0}\, x[n-m]$$



„Addition“

„Multiplikation“

„Zeitverzögerung“

8. Diskrete Fouriertrafo (DFT)

Für ein Signal der **Länge N** muss das Spektrum **N mal abgetastet** werden

$$\hat{x}\left(\frac{k}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-2\pi i k n/N} \triangleq \hat{x}[k], \quad k = 0,1,\dots,N-1$$

DFT- Matrix: $[F_n]_{k,n} = {\omega_N}^{kn}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}[0] \\ \hat{x}[1] \\ \vdots \\ \hat{x}[N-1] \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \cdots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \cdots & \omega_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \cdots & \omega_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_N} \underbrace{\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}, \quad \omega_N = e^{-2\pi i/N}$$

$${F_N}^H F_N = N\, I_N = F_N {F_N}^H$$

Diskrete Fouriertransformation (DFT)

$$\hat{x}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-2\pi i k n/N}, \qquad \hat{x}[k+N] = \hat{x}[k]$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}[k]\, e^{2\pi i n k/N}, \qquad x[n+N] = x[n]$$

$$\hat{\boldsymbol{x}} = F_N\, \boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} = \frac{1}{N} {F_N}^H\, \hat{\boldsymbol{x}}$$

Zyklische Faltung

$$x_3[l] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n]\, x_2[l-n], \quad \hat{x}_3[k] = \hat{x}_1[k]\, \hat{x}_2[k]$$

Lineare Faltung -> Zyklischer Faltung (S.66)

1. *Zero-padding :* Auffüllen der Signale auf $N \geq P + L - 1$
2. Berechnen der N-Punkt DFTs, d.h. $\hat{x}_1$ u. $\hat{x}_2$
3. Berechnen des Produkts $\hat{x}_3[k] = \hat{x}_1[k]\, \hat{x}_2[k]$
4. Inverse DFT, wobei Signale periodisch

$$\rightarrow \tilde{x}_3[l] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_1[n]\, \tilde{x}_2[l-n]$$

9. Fast Fourier Transformation (FFT)

Komplexitäten

Faltung direkt: $O(N^2)$

DFT: $O(N^2)$

FFT: $O(N * \log N)$

Cooley & Tukey: max. Komplexität von $4\, N\, \log_2(N)$

Idee: „Divide et impera“ : $n = \log N$ mal halbieren

10. Hilberträume

Hilbertraum: linearer Raum, der mit einem inneren Produkt ausgestattet und vollständig ist

ONS: Orthonormalsystem

Abtastreihe (S.79)

Raum der $2\, f_g - bandbegrenzten$ Signale:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\, \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}\,(t-kT)\right)}{\frac{\pi}{T}\,(t-kT)}$$

Dann bilden folgende Funktionen ein ONS:

$$\Phi_l(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\, \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}\,(t-lT)\right)}{\frac{\pi}{T}\,(t-lT)} = \sqrt{T}\, \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}\,(t-lT)\right)}{\pi\,(t-lT)}$$

10. Good to know / Verschiedenes

Laplace

$$Y(s) = H(s) * X(s)$$

Sin / cos

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$e^{iz} = \cos(z) + i * \sin(z)$$

Verschiedenes

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = x[n] + x[n-1] + \cdots$$

$$h(t) = \begin{cases} 1 & T_1 < t < T_1 + T \quad \rightarrow\ |t - T_1| \leq \frac{T}{2} \\ beliebig & \rightarrow setze\ =\ 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow\ Fouriertransformiert: \ \frac{\sin(\dots)}{\dots} * e^{-2\pi i f\, T_1}$$

$$\omega_{N/2} = e^{-2\pi i\, /\, \frac{N}{2}} = \left(e^{-2\pi i\, /\, N}\right)^2 = (\,\omega_N\,)^2$$

11. Tabellen

$$i = \sqrt{1} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\tan' x = 1 + \tan^2 x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cos(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$$

$$\sin(z) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$$

Grad	Rad	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\tan\varphi$
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{1}{2}\pi$	1	0	
120°	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
150°	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
180°	π	0	-1	0

Additionstheoreme

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

Doppelter und halber Winkel

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi \qquad \sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos\varphi)$$

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \qquad \cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos\varphi)$$

$$\tan 2\varphi = \frac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi} \qquad \tan^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}$$

Umformung einer Summe in ein Produkt

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Umformung eines Produkts in eine Summe

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$
$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$$
$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)$$

Reihenentwicklungen

$$e^x = 1 + x + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$$

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\operatorname{artanh} x = x + \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Summe der ersten n-Zahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Fourier-Korrespondenzen

$f(t)$	$\widehat{f}(\omega)$
e^{-at^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{-\omega^2}{4a}}$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$

Eigenschaften der Fourier-Transformation

Eigenschaft	$f(t)$	$\widehat{f}(\omega)$
Linearität	$\lambda f(t)+\mu g(t)$	$\lambda\widehat{f}(\omega)+\mu\widehat{g}(\omega)$
Ähnlichkeit	$f(at) \quad a>0$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\widehat{f}(\frac{\omega}{a})$
Verschiebung	$f(t-a)$	$e^{-ai\omega}\widehat{f}(\omega)$
	$e^{ait}f(t)$	$\widehat{f}(\omega-a)$
Ableitung	$f^{(n)}(t)$	$(i\omega)^n\widehat{f}(\omega)$
	$t^n f(t)$	$i^n\widehat{f}^{(n)}(\omega)$
Faltung	$f(t)*g(t)$	$\widehat{f}(\omega)\cdot\widehat{g}(\omega)$

Partialbruchzerlegung (PBZ)

Reelle Nullstellen n-ter Ordnung:

$$\frac{A_1}{(x-a_k)}+\frac{A_2}{(x-a_k)^2}+\dots+\frac{A_n}{(x-a_k)^n}$$

Paar komplexer Nullstellen n-ter Ordnung:

$$\frac{B_1x+C_1}{(x-a_k)(x-\overline{a_k})}+\dots+\frac{B_nx+C_n}{[(x-a_k)(x-\overline{a_k})]^n}+$$

$$(x-a_k)(x-\overline{a_k})=(x-Re)^2+Im^2$$

Laplace- Korrespondenz

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$\sigma(t)$	1	$H(t-a)$	$\frac{1}{s}e^{-as}$
1	$\frac{1}{s}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
t	$\frac{1}{s^2}$	te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$

Eigenschaften der Laplace-Transformation

Eigenschaft	$f(t)$	$F(s)$
Linearität	$\lambda f(t)+\mu g(t)$	$\lambda F(s)+\mu G(s)$
Ähnlichkeit	$f(at) \quad a>0$	$\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$
Verschiebung im Zeitbereich	$f(t-t_0)$	$e^{-st_0}F(s)$
Verschiebung im Bildbereich	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
Ableitung im Zeitbereich	$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
	$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
	$f^{(n)}$	$s^nF(s)-\sum_{k=0}^{n-1}f^{(k)}(0)s^{n-k-1}$
Ableitung im Bildbereich	$-tf(t)$	$F'(s)$
	$t^2f(t)$	$F''(s)$
	$(-t)^nf(t)$	$F^{(n)}(s)$
Integration im Zeitbereich	$\int_0^t f(u)\,du$	$\frac{1}{s}F(s)$
Integration im Bildbereich	$\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^\infty F(u)\,du$
Faltung	$f(t)*g(t)$	$F(s)\cdot G(s)$
Periodische Funktion	$f(t)=f(t+T)$	$\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}\,dt$

Winkel - Werte

Grad	Rad	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\tan\varphi$
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{1}{2}\pi$	1	0	
120°	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
150°	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
180°	π	0	-1	0

Ableitungen

Potenz- und Exponentialfunktionen			Trigonometrische Funktionen		Hyperbolische Funktionen	
$f(x)$	$f'(x)$	Bedingung	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$	$\sin x$	$\cos x$	$\sinh x$	$\cosh x$
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{Z}_{<0},\ x \neq 0$	$\cos x$	$-\sin x$	$\cosh x$	$\sinh x$
x^a	ax^{a-1}	$a \in \mathbb{R},\ x > 0$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\log x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
e^x	e^x		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
a^x	$a^x \cdot \log a$	$a > 0$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Stammfunktionen

$f(x)$	$F(x)$	Bedingung	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$	$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$	$\sin(\omega t)\sin(\omega t)$	$\frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega}$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$n \in \mathbb{Z}_{\leq -2},\ x \neq 0$	$\tan x$	$-\log\lvert\cos x\rvert$	$\sin(\omega t)\cos(\omega t)$	$-\frac{\cos(2\omega t)}{4\omega}$
x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$	$a \in \mathbb{R},\ a \neq -1,\ x > 0$	$\tanh x$	$\log(\cosh x)$	$\sin(\omega t)\sin(n\omega t)$	$\frac{n\cos(\omega t)\sin(n\omega t)-\sin(\omega t)\cos(n\omega t)}{\omega(n^2-1)}$
$\log x$	$x\log x - x$	$x > 0$	$\sin^2 x$	$\frac{1}{2}(x - \sin x\cos x)$	$\sin(\omega t)\cos(n\omega t)$	$\frac{n\sin(\omega t)\sin(n\omega t)+\cos(\omega t)\cos(n\omega t)}{\omega(n^2-1)}$
e^{ax}	$\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}$	$a \neq 0$	$\cos^2 x$	$\frac{1}{2}(x + \sin x\cos x)$	$\cos(\omega t)\sin(n\omega t)$	$\frac{\sin(\omega t)\sin(n\omega t)+n\cos(\omega t)\cos(n\omega t)}{\omega(1-n^2)}$
a^x	$\frac{a^x}{\log a}$	$a > 0,\ a \neq 1$	$\tan^2 x$	$\tan x - x$	$\cos(\omega t)\cos(n\omega t)$	$\frac{\sin(\omega t)\cos(n\omega t)+n\cos(\omega t)\sin(n\omega t)}{\omega(1-n^2)}$

Standard-Substitutionen

Integral	Substitution	Ableitung	Bemerkung
$\int f(x,\ x^2+1)\,\mathrm{d}x$	$x = \tan t$	$\mathrm{d}x = \tan^2 t + 1\,\mathrm{d}t$	$t \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$
$\int f(x,\ \sqrt{ax+b})\,\mathrm{d}x$	$x = \frac{t^2-b}{a}$	$\mathrm{d}x = \frac{2}{a}t\,dt$	$t \geq 0$
$\int f(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x$	$x + \frac{b}{2a} = t$	$\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$	$t \in \mathbb{R}$, quadratische Ergänzung
$\int f(x,\ \sqrt{a^2-x^2})\,\mathrm{d}x$	$x = a\sin t$	$\mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t$	$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2},\ 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$
$\int f(x,\ \sqrt{a^2+x^2})\,\mathrm{d}x$	$x = a\sinh t$	$\mathrm{d}x = a\cosh t\,\mathrm{d}t$	$t \in \mathbb{R},\ 1 + \sinh^2 x = \cosh^2 x$
$\int f(x,\ \sqrt{x^2-a^2})\,\mathrm{d}x$	$x = a\cosh t$	$\mathrm{d}x = a\sinh t\,\mathrm{d}t$	$t \geq 0,\ \cosh^2 x - 1 = \sinh^2 x$
$\int f(\mathrm{e}^x,\ \sinh x,\ \cosh x)\,\mathrm{d}x$	$\mathrm{e}^x = t$	$\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$	$t > 0,\ \sinh x = \frac{t^2-1}{2t},\ \cosh x = \frac{t^2+1}{2t}$
$\int f(\sin x,\ \cos x)\,\mathrm{d}x$	$\tan\frac{x}{2} = t$	$\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$	$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$