Analysis III Zusammenfassung

Andreas Biri, D-ITET 19.01.14

1. Partielle Differentialgleichungen

Ordnung: höchste vorkommende Zahl von Ableitungen

Eindimensionale Wellengleichung

$$u_{tt} - c^2\, u_{xx} = 0$$

Lösung: jede Funktion der Form

$$u(x,t) = F\,(\,x - c\,t\,) + G(\,x + c\,t\,)$$

D'Alembert
Für gegebene Anfangsdaten

$$u\,(\,x,0) = f(x)\,, u_t\,(\,x,0) = g(x)$$

Wird das Anfangswertproblem gelöst durch

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\,(\,f(x+ct) + f(x-ct)\,) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds$$

2D : kein D'Alembert -> Separationsmethode

2. Lineare Differentialgleichungen

Homogen/Harmonisch: $\Delta u = 0$ $\quad, wobei\ \Delta u\ linear\ in\ u\ ist$

Inhomogen: $\Delta u = f(x,t)$

Allgemeine Lösung

u_p : partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung
U : Lösung der homogenen Gleichung $\Delta u = 0$

$$u(x,t)\ =\ u_p + U$$

Separation der Variabeln

Ansatz: $\quad u(x,t) = X(x) * T(t)$

$$\rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \alpha\,\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda = const.$$

Für $X''(x) = \frac{\lambda}{\alpha}\,X(x)\ sind\ Lösungen$:

i) $\frac{\lambda}{\alpha} > 0$: $\quad X(x) = c_1\,e^{\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}x} + c_2\,e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}x}$

ii) $\frac{\lambda}{\alpha} < 0$: $\quad X(x) = A * \sin(\omega\,x) + B * \cos(\omega\,x),\ \omega = \sqrt{-\frac{\lambda}{\alpha}}$

iii) $\lambda = 0$: $\quad X(x) = ax + b$

Für $\quad T'(t) = \lambda\,T(t)\ :\quad T(t) = c * e^{\lambda\,t}$

Bei homogenen Randbedingungen $X(0) = X(l) = 0$

$$\rightarrow x = 0 :\ B = 0\quad ;\ x = l :\ A * \sin(\,\omega\,l) = 0$$

$$\rightarrow \omega_n = \frac{\pi}{l}\,n\quad ,\qquad \lambda_n = -\,\alpha\,\omega_n^2 = -\alpha\frac{\pi^2}{l^2}\,n^2$$

$$u_n(x,t) = T_n(t) * X_n(x)\quad \rightarrow\quad u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_n(x,t)$$

Inhomogene lineare PDG

Suchen eine partikuläre Lösung $u_p(x,t)$

Ansatz, dass $\boldsymbol{u_p\ nicht\ von\ t\ abhängt}$

$\rightarrow RB = 0$: $\qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0$

Inhomogen: $\rightarrow u_p(x)$: $\frac{du_p}{dt} - \frac{d^2\,u_p}{dx^2} = 0\quad , u_p(0)\ \neq 0$
$\Longrightarrow u(x,t) = U(x,t) - u_p(x)$

3. Lösung v. PDG mittels Fourierreihen

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t)\,e^{2\pi i\,nx/T}\quad ,\qquad T\ Periode$$

$$c_n(t) = \frac{1}{T}\int_0^T u(x,t)\,e^{-2\pi i\,nx/T}\,dx$$

Für ein Anfangswertproblem $u(x,0) = f(x)$ ist

$$c_n(0) = Fourierkoeff.von\,f(x)\ = \tfrac{1}{T}\int_0^T f(x)\,e^{-2\pi inx/T}\,dx$$

Ungerades Fortsetzen von Funktionen

Für $u(x,t)\ auf\ Intervall\ [0,l]$, setze ungerade fort

$$\rightarrow\ 2l\,periodisch:\quad 2\pi R = 2\,l\quad \rightarrow\ R = \frac{l}{\pi}$$

Wissen: Solche Lösungen sind

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\cos\left(\frac{2\pi}{l}n\,x\right) + b_n(t)\ \sin\left(\frac{\pi\,n}{l}\,x\right)$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^l u(x,t)\cos(\frac{2\pi}{l}\,n\,x)\ ,\quad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l u(x,t)\sin\left(\frac{\pi\,n}{l}\,x\right)$$

Wärmeleitungsgleichung $\quad u_t = \alpha\,u_{xx}$

$$\rightarrow\ b_n(t) = b_n(0)\,e^{-\alpha\,\pi^2\frac{n^2}{l^2}t}$$

Schwingende Saite $\quad \frac{1}{c^2}\,u_{tt} = u_{xx}$

$$\rightarrow\ b_n(t) = A_n * \cos(\,\omega_n\,t) + B_n * \sin(\,\omega_n\,t\,),\ \ \omega_n = \frac{c\pi n}{l}$$

$A_n, B_n\ Fourierkoeff.\ der\ Anfangsbed.\ u(x,0), u_t(x,0)$

Schwingende Membrane

Randbedingung: $u|_{d\Omega} = 0$

Rechteckige Membran

Ansatz: $u(x,y,t) = X(x) * Y(y) * T(t)$

$$T'' = \alpha\, T, \qquad X'' = \beta\, X, \qquad Y'' = \gamma\, Y$$

$$\frac{1}{c^2}\, \alpha = \beta + \gamma \qquad \rightarrow \quad \beta\, c^2 = \alpha - c^2\, \gamma$$

Kreisförmige Membran

Ansatz: $u(r,\varphi,t) = F(r) * G(\varphi) * T(t)$

Für Ableitungen von G und F : nochmals Separation d V.

Fouriertransformation auf $\mathbb{R}^n$

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(k)\, e^{ikx}\, dk_1 \ldots dk_n$$

$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-ikx}\, dx_1 \ldots dx_n$$

Ableitungsregel

$$\left(\widehat{\frac{df}{d\, x_j}} \right)(k) = i\, k_j\, \hat{f}(k)$$

$$\hat{\Delta} = -|y|^2$$

Randbedingungen gegeben -> Fourier

Anfangsbedingungen gegeben -> Laplace

4. Die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \alpha\, \Delta\, u \quad ; \; u(x,0) = f(x)$$

Mittels Fouriertransformation wird gezeigt:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\, K_t(x-x')\, dx'$$

mit Wärmeleitungskern

$$K_t(x-x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha k^2 t + ik(x-x')}\, dk = \frac{e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}}}{\sqrt{4\pi\alpha t}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_t(x-x')\, dx' = 1 \;, \quad K_t(x-x') > 0$$

Für inhomogenes Problem: $u_t - \alpha\, u_{xx} = g(x,t)$

Periodische Anfangsbedingungen: Sep.d.V. / Fourierreihen

Ansonsten: Laplace

oder Ansatz: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(t)\, \sin\left(\frac{n\pi}{L}\, x\right)$

In 3 Dimensionen:

$$u_t = \alpha\, \Delta u \rightarrow \; u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x')\, K_t(x-x')\, dx_1'\, dx_2'\, dx_3'$$

$$K_t(x-x') = \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\frac{|x-x'|^2}{4\alpha t}}$$

Funktion ungerade fortsetzen (Randbedingungen)

$$\Rightarrow \; f(x) = \sum D_n * \sin(\frac{n\pi}{L}\, x)$$

5. Wellengleichungen (auf $\mathbb{R}^3$)

$$u_{tt} = c^2\, \Delta\, u$$

Anfangswertproblem: $u(x,0) = f(x)\,,\; u_t(x,0) = g(x)$

Inhomogen: homogenisieren mit $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$

Ansatz:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin(\,\omega\, n\, x)$$

Lösung:

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{u}(k,t)\, e^{i\,k\,x}\, dk$$

$$\hat{u}(k,0) = \hat{f}(k) * \cos(\,|k| * c\, t\,) + \frac{\hat{g}(k)}{c * |k|} * \sin(\,|k| * c\, t\,)$$

Lemma 6.1 : Für R > 0 gilt

$$\frac{\sin(\,|k| * R)}{|k|} = \frac{1}{4\pi R} \int_{S_R} e^{iky}\, d\omega(y) \quad , \quad S_R = \{\, y \in \mathbb{R}^3 \mid |y| = R\,\}$$

Mit dem Lemma 6.1 kann gezeigt werden, dass

Kirchhoff:

$$u(x,t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}} f(x+y)\, d\omega(y) \right] + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}} g(x+y)\, d\omega(y)$$

Huyghens-Prinzip

u(x,t) hängt nur von *f* und *g* auf einer (beliebig kleinen) Umgebung der Spähre mit Radius *ct* um *x* ab

Gerade Dimension (2D) : hängt von ganzer Kreisscheibe ab

Ungerade Dimension (3D) : hängt nur vom Rand ab

6. Laplace-Transf. & lineare PDG

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

Betrachte Fall x = 0: $\rightarrow zB. \quad U(0,s) = \boldsymbol{\mathcal{L}}[\boldsymbol{f}]$

7. Laplace-Gleichung

Dirichlet-Problem

Gegeben ist eine Funktion *f* auf dem Rand *dD* von *D*
Suche *u(x)* auf *D* mit $\Delta u = 0$, $u\,|_{dD} = f$

n = 2: $\quad D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le a^2 \}$

In Polarkoordinaten:

$$u(r,\varphi) = \int_0^{2\pi} K(r,\varphi,\varphi')\, f(\varphi')\, d\varphi'$$

$$K(r,\varphi,\varphi') = \frac{1}{2\pi}\,\frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\varphi - \varphi') + r^2}$$

Poisson-Formel (für kartesische Koordinaten)

$$\Delta u = 0\,, \qquad u\,|_{dD} = f \qquad , D = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \le a \}$$

n = 2:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi a} \int_{dD} \frac{a^2 - |x|^2}{|x - x'|^2}\, f(x')\, d\sigma(x')$$

n = 3:

$$u(x) = \frac{1}{4\pi a} \int_{dD} \frac{a^2 - |x|^2}{|x - x'|^3}\, f(x')\, d\omega(x')$$

Mittelwertprinzip

Ist u harmonisch auf einem Gebiet D ($\Delta u = 0$) , so ist für jedes $x \in D$, und jede Kugel in *D* um Mittelpunkt *x*

***u(x)* = Mittelwert von u auf dieser Kugeloberfläche**

Maximumprinzip

Ist *u* harmonisch auf einem abgeschlossenen und beschränkten Gebiet *D*, so nimmt ***u* sein Maximum am Rand von *D*** an.

Die δ - Funktion

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty\,, & x = 0 \\ 0\,, & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, \varphi(x)\, dx = \varphi(0)$$

Dies lässt sich beweisen durch

$$\delta = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon \quad , \; \delta_\varepsilon = \begin{cases} 1/\varepsilon & |x| < \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & |x| > \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \qquad , \; \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x)\, dx = 1$$

Das Coulomb - Potential

$$\Delta u = \delta$$

Lemma

$in\ \mathbb{R}^3$: $\qquad \Delta \frac{1}{r} = -4\,\pi\,\delta$

$in\ \mathbb{R}^2$: $\qquad \Delta \ln(r) = 2\,\pi\,\delta$

Poisson - Gleichung

$$\Delta u = -4\,\pi\,\rho$$

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x - x'|}\, \rho(\,x'\,)\, dx'$$

Green'sche Funktionen (auf beschränkten Bereichen)

Sei *D* ein Bereich in $\mathbb{R}^3$ mit Rand *dD*. Eine Funktion $G(x,x_0)\ auf\ D\ x\ D$ heisst **Green'sche Funktion**, falls

$$\Delta G(x,x_0) = \delta(x - x_0) \;, \qquad G(x,x_0) = 0 \quad \forall\, x \in dD$$

Satz 1: Green'sche Funktionen sind symmetrisch, d.h.

$$G(x,x_0) = G(x_0,x)$$

Satz 2: Ist *f* eine Funktion auf *D*, *h* eine Funktion auf *dD*

$$u(x) = \int_D G(x,x')\, f(x')\, d\mu(x') + \int_{dD} D_{\vec{n}}\, G(x,x')\, h(x')\, d\omega(x')$$

löst das Dirichlet-Problem $\qquad \Delta u = f\,,\; u\,|_{dD} = h$

Spezialfall: für $u\,|_{dD} = h = 0$ fällt der zweite Teil weg

Satz 3:
Sei $(\,\Phi_\lambda\,)\,, \lambda \in \Lambda$ ein System reelwertiger Funktionen auf D, s.d.

$$\Delta\,\Phi_\lambda = -\,\lambda\,\Phi_\lambda\,;\; \Phi_\lambda\,|_{dD} = 0\,;\; \|\Phi_\lambda\|_2 = \sqrt{\int_D |\Phi_\lambda|^2\, d\mu(x)} = 1$$

s.d. sich jede Funktion auf D mit $\varphi\,|_{dD} = 0$ als Reihe in Φ_λ schreiben lässt. Dann ist die Green'sche Funktion für D gleich

$$G(x,x_0) = -\sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{\lambda}\, \Phi_\lambda(x)\, \Phi_\lambda(x_0)$$

2. Green'sche Formel

$$\int_D (\,f\,\Delta g - g\,\Delta f\,)\, d\mu(x) = \int_{dD} (\,f(x)\, D_{\vec{n}}\, g(x) - g(x)\, D_{\vec{n}}\, f(x)\,)\, d\omega(x)$$

wobei $D_{\vec{n}}\, f(x)$ die Richtungsableitung von f in $x \in dD$ in Richtung d. n. aussen zeigenden Normeleneinheitsvektors

Fundamentallösung d. Laplaceoperators auf $\mathbb{R}^2$

$$\Gamma(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{4\pi}\ln(\,(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\,)$$

Setze G mit d. Lösung so zusammen, dass 0 auf Rand

Möglichkeiten, den Fall D = Kreis/Kugel zu behandeln

$$\Delta u = f, u\,|_{dD} = h$$

1. Greensche Funktion für Bereich

2. Löse zunächst mit der Greenschen $\frac{1}{|x-x'|}$ $\mathit{für\ ganz}\ \mathbb{R}^3$

$$\Delta u = f \quad auf\ \mathbb{R}^3 \qquad \rightarrow\ Lösung\ u_1$$

Löse dann mit dem Poissonkern

$$\Delta u = 0\,, u\,|_{dD} = u_1\,|_{dD} \quad \rightarrow\ Lösung\ u_2$$

$$\Longrightarrow \qquad u = u_1 - u_2$$

8. Die Methode der Charakteristiken

Eine PDG erster Ordnung für *u(x,t)* heisst

- quasilinear, falls

$$a(x,t,u) * u_x + b(x,t,u) * u_t = c(x,t,u)$$

- linear, falls

$$a(x,t) * u_x + b(x,t) * u_t = c_1(x,t) + c_2(x,t) * u$$

Spezialfall d. Satzes von Cauchy-Kowalewskaja

Sei $a(x,t,u) = 0$. Für jede Funktion *f(x)* gibt es eine Funktion *T(x) > 0* , s.d. das Cauchy-Problem

$$a(x,t,u) * u_t + b(x,t,u) * u_x = c(x,t,u)$$
$$u(x,0) = f(x)$$

eine Lösung *u(x,t)* im Bereich $\{\,(x,t)\mid 0 \le t \le T(x)\,\}$

Methode der Charakteristiken

Suche Kurven $t \rightarrow (\,x(t),t\,)$, längs derer sich die PDG auf eine gewöhnliche DGL reduziert (nur mit einer Variabel). Suche für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Funktion $t \rightarrow x(t,x_0)$ mit $x(0,x_0) = x_0$, s.d. die PDG eine gewöhnliche DGL für $z(t,x_0) := u(x(t,x_0),t)$ ergibt.

Algorithmus

$$u_t + c(\,x,t,u\,) * u_x = d(x,t,u\,) \qquad ,t \ge 0$$

$$u(x,\gamma(x)\,) = f(x)$$

1. Für jedes x_0 löse man das System

$$x'(t) = c(\,x(t),t,z(t)\,), \qquad x(\,\gamma(x_0)\,) = x_0$$

$$z'(t) = d(\,x(t),t,z(t)\,), \qquad z(\,\gamma(x_0)\,) = f(x_0)$$

Nenne Lösung: $x(t,x_0)$, $z(t,x_0)$

2. Die Lösung *u* ist implizit gegeben durch

$$u(\,x(t,x_0),t\,) = z(\,t,x_0\,) \qquad \forall\, x_0$$

3. Löse folgende Gleichung nach x_0 auf

$$x(\,t,x_0\,) = x \qquad \forall\, x$$

Und setzte in die Funktion *z* ein $\Longrightarrow$ *u*

Spezialfalls: $\gamma(x) = 0$ (oft)

Jede durch t parametrisierte Kurve $t \rightarrow (\,t,x(t),z(t)\,)$, die die Gleichungen bei 1. erfüllt, heisst **Charakteristik.**

Für eine spezielle durch einen gewissen Punkt (… , s) , setze die Anfangsbedingungen entsprechend (x_0 / y_0)

2. Algorithmus

$$a(x,y) * u_x + b(x,y) * u_y = c_0(x,y) * u + c_1(x,y)$$
$$u(x_0(s),y_0(s)) = u_0(s)$$

$$\begin{aligned} x(t,s)_t &= a &&, \quad x(0,s) = x_0(s)\\ y(t,s)_t &= b &&, \quad y(0,s) = y_0(s)\\ u(t,s)_t &= c_0 * u + c_1 &&, \quad u(0,s) = u_0(s) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ Rücktrafo\colon\ (t,s) \rightarrow (x,y) \quad \Longrightarrow \quad u(x,y)$$

Erhaltungsgrössen und Schocks

Burger-Gleichung (ohne Viskosität)

$$u_t + u * u_x = 0 \quad , \quad u(x,0) = h(x)$$

$$c(x,t,z) = z\ , \qquad d(x,t,z) = 0$$

Charakteristiken sind Geraden, die sich schneiden können!

Dazugehöriges physikalisches Problem

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\ u^2 = 0$$

Durch Integration gilt für alle a < b die **schwache Lösung**

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(\,\xi\,,t\,)\,d\xi \ +\ \frac{1}{2}\,[\,u(b,t)^2 - u(a,t)^2\,] = 0$$

Schocks

$$u(\,x_0 + t * h(x_0),t) = h(x_0)$$
$$x(x_0,t) = x_0 + t * h(x_0)$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit nach kritischem Punkt α

$$\sigma'(\alpha) = \frac{1}{2}\,(\,u^-(\alpha) + u^+(\alpha)\,) \qquad t > \alpha$$

Erhaltungssatz

$$u_t + d_x\, F(u) = 0 \quad \rightarrow \quad u_t + F'(u) * u_x = 0$$

$$x' = F'(u)\ , \qquad z' = 0 \ \rightarrow\ z = u_0$$

$$\Longrightarrow \quad x(t) = F'(u) * t + x_0$$

$$u_0 = \begin{cases} u_l & x_0 < 0 \\ u_r & x_0 > 0 \end{cases}$$

Annahme: u hat nur Sprungstelle in $x = \gamma(t)$

Schockwelle: $\mathbf{F'(\,u_r) < F'(\,u_l)}$

$$\gamma'(t) = \frac{F\,(\,u_l\,) - F\,(\,u_r\,)}{u_l - u_r}$$

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & x < \gamma(t) \\ u_r & x > \gamma(t) \end{cases}$$

Verdünnungswellen: $\boldsymbol{F'(\,u_r) > F'(\,u_l)}$

$$u(x,t\,) = \begin{cases} u_l & x < F'(u_l) * t \\ g\left(\frac{x}{t}\right) & F'(u_l) * t < x < F'(u_r) * t \\ u_r & x > F'(u_r) * t \end{cases}$$

$wobei\ g = {F'}^{-1}(u) \quad (\,Inverse\,)$

9. Lineare PDG verschiedener Ordnungen

PDG erster Ordnung

$$A * u_t + B * u_x = C$$

Charakteristiken: $x' = \frac{B}{A}$

Werte auf Charakteristiken: $z' = \frac{C}{A}$

Anfangswertkurve: $t = \gamma(x) \rightarrow t_0 = \gamma(x_0)$

Differentiation von $u(x, \gamma(x)\,) = f(x)$ nach x gibt

$$u_x * 1 + u_t * \gamma'(x_0) = f'(x_0)$$

Gleichungssystem für $u_x(x_0,t_0), u_t(x_0,t_0)$

$$\begin{aligned} A * u_t + B * u_x &= C \\ \gamma' * u_t + 1 * u_x &= f'(x_0) \end{aligned}$$

ist eindeutig bestimmbar, falls

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ \gamma'(x_0) & 1 \end{bmatrix} \neq 0\ ,also\ \gamma'(x_0) \neq \frac{A}{B}$$

$\frac{A}{B}$ ist gerade die Steigung der Charakteristik (x')

PDG 2. Ordnung (in zwei Variabeln)

$$A * u_{xx} + 2B * u_{xy} + C * u_{yy} = D * u_x + E * u_y + F$$

heisst in einem Punkt $(\,x_0, y_0\,)$

$$\begin{matrix} elliptisch \\ parabolisch \\ hyperbolisch \end{matrix} \Leftrightarrow \det\begin{bmatrix} A(x_0,y_0) & B(x_0,y_0) \\ B(x_0,y_0) & C(x_0,y_0) \end{bmatrix} = \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ Q(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} positiv\ od.negativ\ definit \\ semidefinit, \boldsymbol{aber}\ nicht\ definit \\ indefinit \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow Eigentwerte\ v.\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{cases} haben\ gleiches\ Vorzeichen\ \neq 0 \\ einen\ Eigenwert = 0 \\ haben\ verschiedene\ Vorzeichen \end{cases}$$

Beispiele

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -c^2 \end{pmatrix} & hyperbolisch \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & parabolisch \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & elliptisch \end{matrix}$$

Bedeutung dieser Klassifikation

Seien Anfangswerte für u, u_t, u_x auf $y = \gamma(x)$ vorgegeben

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma'(x) \end{pmatrix}\ Tangentialvektor\ an\ \gamma$$

Richtungsableitung in Richtung v : $D_v\, u_x\ , D_v\, u_y$

$$\begin{aligned} A * u_{xx} + 2B * u_{xy} + C * u_{yy} &= \dots \\ v_1 * u_{xx} + v_2 * u_{xy} \qquad\qquad &= D_v\, u_x \\ v_1 * u_{xy} + v_2 * u_{yy} &= D_v\, u_y \end{aligned}$$

$$\det\begin{pmatrix} A & 2B & C \\ v_1 & v_2 & 0 \\ 0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix} = A * v_2^2 - 2B * v_1 v_2 + C * v_1^2 = Q(-v_2, v_1)$$

Elliptisch: stets $\neq 0$
hyperbolisch: Problem, falls $Q(-v_2, v_1) = 0$

Charakteristik der hyperbolischen PDG

Eine Kurve in der *x,y*-Ebene heisst Charakteristik der hyp. PDG $A * u_{xx} + 2B * u_{xy} + C * u_{yy} = \ ...$, falls in jedem ihrer Punkte ihr Normalenvektor die Gleichung erfüllt:

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = 0$$

oder auch $\quad A\, n_1^2 + 2B\, n_1 n_2 + C\, n_2^2 = 0$

Normalenform einer hyperbolischen PDG

Für eine hyperbolische PDG gibt es Koordinaten ξ, η , s.d. mit $w(\,\xi, \eta\,) = u\,(\,\xi(x,y)\,, \eta(x,y)\,)$ die PDG äquivalent ist zu einer Gleichung der Form

$$w_{\xi\eta} = Terme\ niedrigerer\ Ordnung$$

Die Charakteristiken von $w_{\xi\eta} = 0$ sind $\xi = const, \eta = const$

$\Longrightarrow$ Suche ξ , η , s.d. die Niveaulinien von ξ , η die Charakteristiken sind !

Konstruktion von ξ , η

ξ , η müssen wegen des Satzes folgendes erfüllen

$$\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix}$$

$$A\, \xi_x^2 + 2\, B\, \xi_x \xi_y + C\, \xi_y^2 = 0$$
$$A\, \eta_x^2 + 2\, B\, \eta_x \eta_y + C\, \eta_y^2 = 0$$

Suche ξ , η , s.d.

$$A\, \xi_x + \left(\, B + \sqrt{B^2 - AC}\,\right) \xi_y = 0$$
$$A\, \eta_x + \left(\, B - \sqrt{B^2 - AC}\,\right) \eta_y = 0$$

Löse PDG für ξ , η mittels Methode d. Charakteristiken !

$$\Longrightarrow u(x,y) = F(\,\xi(x,y)\,, \eta(x,y)\,)$$

Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix}$$

Reguläre Transformation (Vorzeichen d. Det. unverändert)

$$det \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} \neq 0$$

Normalenform von PDGs

$$a\, u_{xx} + b\, u_{yy} + c\, u_{xy} + d\, u_x + e\, u_y + f\, u + g = 0$$

Siehe Beiblatt

10. Variationsrechnung

Minimalflächen

D Gebiet in $\mathbb{R}^2$

$\gamma:\ dD \to \mathbb{R} \quad , \qquad \Gamma \subset \mathbb{R}^3\ Graph\ von\ \gamma$

Suche eine in Γ eingespannte Fläche mit minimalem Flächeninhalt

Notwendige Bedingung für ein Minimum

Für jede Funktion ψ auf D mit $\quad \psi\,|_{dD} = 0 \quad$ gilt

$$\delta\, A(u)\,(\,\psi\,) = \frac{d}{d\varepsilon}\, A(\,u + \varepsilon\,\psi\,)\,|_{\varepsilon=0} = 0$$

Für eine Funktion

$$E(u) = \int_D F(\,x, y, L_1(u), L_2(u), \dots, L_m(u)\,)\, dxdy$$

wobei L_i (u) linearer Operator (zB. $L(u) = u_x\ /\ u\ /\ u_{xyz}$)

$$\Longrightarrow F(\,u + \varepsilon\,\psi\,) = F(u) + \varepsilon \sum_{i=1}^{m} \frac{dF}{d\,L_i}(u)\, L_i(\psi) + \varepsilon^2 * \dots$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{d\varepsilon}\, A(\,u + \varepsilon\,\psi\,)\,|_{\varepsilon=0} = \int_D \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{dF}{d\,L_i}(u)\, L_i(\psi) \right) dxdy$$

Fallunterscheidungen bei Randbedingungen !

$$\forall\, \varphi\,, also\ auch\ für\ \varphi(0) = \varphi(L) = \varphi'(0) = 0$$

Bsp

$$A(u) = \int_D \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} \quad \to \quad \Delta u\ = 0\ für\ Minimum$$

11. Verschiedenes

Laplace-Operator

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2} \to \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

Polarkoordinaten: $\Delta = \frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}+\frac{1}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}$

Kugelkoordinaten: $\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}$

$$\Delta_r = \frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr} \quad , \quad \Delta_{\theta,\varphi} = \frac{d^2}{d\theta^2}+\cot\theta\frac{d}{d\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2}{d\varphi^2}$$

Mehrdimensionale Kettenregel

$$g(r,\varphi) = f\,(x(r,\varphi), y\,(r,\varphi))$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{dg}{dr}*\frac{dr}{dx} + \frac{dg}{d\varphi}*\frac{d\varphi}{dx}$$

Wichtige PDG-Beispiele

Poisson-Gleichung: $\Delta u = 4\,\pi\,\rho$

Wellengleichung: $\Delta u = \frac{1}{c^2}\,u_{tt}$

Wärmeleitungsgleichung: $u_t = \alpha\,\Delta u$

Euler-Gleichung (ρ *Dichte d. Flüssigkeit, v Geschwindigkeit*)

$$\rho_t + \nabla(\rho * u) = 0$$
$$\vec{u}_t + (\vec{u}\,\nabla)\,\vec{u} = 0$$

Bessel'sche Differentialgleichung

$$x^2\,y'' + x\,y' + (x^2 - n^2)\,y = 0$$

Lösung:

$$y_n(x) = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\,x^{2m}}{2^{2m+n}\,m!\;\Gamma(n+m+1)} \;, x > 0$$

Fourierkoeffizienten

Komplexe Fourierreihe

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t)\,e^{2\pi i\,nx/T} \quad , \quad T\ Periode$$

$$c_n(t) = \frac{1}{T}\int_0^T u(x,t)\,e^{-2\pi i\,nx/T}\,dx$$

Sinus & Cosinus

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\,A_n\cos(\,\omega_n\,t\,) + B_n\sin(\,\omega_n\,t)\,)$$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\,\omega_n\,t)\;dt\,, \qquad B_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\,\omega_n\,t)\;dt$$

$$\omega_n = \frac{2\pi\,t}{T}\;, \qquad c_n = \frac{A_n + i\,B_n}{2}\;, \qquad c_{-n} = \bar{c_n}$$

Green'sche Identitäten

1. Green'sche Identität

$$\int_D (\,f\,\Delta g + \nabla f\,\nabla\,g\,)\,dxdy = \int_{dD} f\,D_{\vec{n}}\,g\;\;ds$$

2. Green'sche Formel

$$\int_D (\,f\,\Delta g - g\,\Delta f\,)\,d\mu(x)$$
$$= \int_{dD} (\,f(x)\,D_{\vec{n}}\,g(x) - g(x)\,D_{\vec{n}}\,f(x)\,)\,d\omega(x)$$

wobei $D_{\vec{n}}\,f(x)$ die Richtungsableitung von f in $x \in dD$ in Richtung d. n. aussen zeigenden Normeleneinheitsvektors

DGL 1. Ordnung

$$y'(x) + P(x) * y(x) = Q(x)$$

$$\to \quad y(x) = \frac{1}{u(x)}\int u(x)\,Q(x)\,dx \quad , \quad u(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

Orthogonalitätsprinzip

$$\int_0^1 \sin(\,j\pi s\,)\sin(\,k\pi s\,)\;ds = \begin{cases}\frac{1}{2} & j = s\\ 0 & j \neq s\end{cases}$$

Leibniz - Regel

$$(\,f * g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}\,g^{(n-k)}, \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Euler'sche DGL

$$r^2\,R''(r) + r * R'(r) - \alpha^2\,R(r) = 0$$

$$\to \quad R(r) = C * r^{\alpha} + D * r^{-\alpha}$$

Laplace

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$\sigma(t)$	1	$H(t-a)$	$\frac{1}{s}e^{-as}$
1	$\frac{1}{s}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
t	$\frac{1}{s^2}$	te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$

Verschiebung im Zeitbereich	$f(t-t_0)$	$e^{-st_0}F(s)$
Verschiebung im Bildbereich	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
Ableitung im Zeitbereich	$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
	$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin(\,\varphi\,)$$

12. Differenzialgleichungen Ana I & II

Homogene DGL mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0\, y = 0$$

1. Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x} \rightarrow charakteristisches\ Polynom$

$$chp(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\,\lambda + a_0$$

Die Nullstellen heissen Eigenwerte der DGL.

2. Für einen komplexen Eigenwert $\lambda = a + ib$ gilt:

$$y_h(x) = Ae^{\lambda_0 x} + Be^{\overline{\lambda_0} x} = e^{ax}(A * e^{ibx} + B * e^{-ibx})$$

3. Jeder m-fache Eigenwert führt zu **Fundamentallösungen**

$$e^{\lambda_0 x}, x\, e^{\lambda_0 x}, x^2 e^{\lambda_0 x}, \ldots, x^{m-1}\, e^{\lambda_0 x}$$

Die allgemeine homogene Lösung $y_h(x)$ besteht aus der *Linearkombination aller Fundamentallösungen*.

Inhomogene DGL mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0\, y = K(x)$$

1. Die allgemeine Lösung besteht aus der Summer der homogenen und der partikulären Lösung:

$$y_{allgemein} = y_{homogen} + y_{partikulär}$$

2. Für eine Störfunktion der Form

$$K(x) := q(x)e^{\lambda_0 x} \quad , \qquad Grad(q) = r$$

und einen m-fachen Eigenwert λ_0 , so ist die partikuläre Lösung mit zu bestimmenen Koeffizenten A_k

$$y_p = (A_0 + A_1\, x + \ldots + A_r\, x^r) * x^m * e^{\lambda_0 x}$$

$$K(x) = x^r, 0\ m - facher\ EW \rightarrow y_p = (A_0 + A_1\, x + \ldots + A_r\, x^r) * x^m$$
$$K(x) = e^{\lambda_0\, x}, \lambda_0\ KEIN\ EW \rightarrow y_p = \frac{1}{chp(\lambda)} e^{\lambda_0\, x}$$

Separierbare Differenzialgleichung

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = f(x) * g(y)$$

Falls y_0 eine NS von g(y) ist, so ist $y(x) = y_0$ eine Lösung.

1. **Separation der Variabeln:** Variabeln je auf eine Seite

$$\frac{1}{g(y)}\, dy = f(x)\, dx$$

2. Beide Seiten integrieren

i) Allgemeine Lösung:

$$\int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int f(x)\, dx$$

ii) Anfangswertproblem $y(x_0) = y_0$:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(y)}\, dy = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx$$

Homogene Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y'(x) = f(x) * y$$

Eine homogene DGL 1. Ordnung ist separierbar:

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \log(y) + k = \int f(x)\, dx = F(x)$$
$$y(x) = C * e^{F(x)}$$

Inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung

1. Homogene Lösung finden:

$$y(x) = C * e^{F(x)} = C * Y(x)$$

2. **Variation der Konstante**: $C \rightarrow C(x)$

3. In ursprüngliche Gleichung einsetzen und lösen:

$$y'(x) = f(x)y + K(x)$$

$$C'(x)Y(x) + C(x)Y'(x) = C(x)f(x)Y(x) + K(x)$$

Da $Y'(x) = f(x) * Y(x)$ (da homogene Lösung)

$$C = \int \frac{K(x)}{Y(x)}\, dx \rightarrow C + C_0$$

$$y(x) = (C(x) + C_0) * Y(x)$$

Homogene Differentialgleichung

$$y' = f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y)$$

1. **Substituiere** $\boldsymbol{u := \frac{y}{x}\ ,\ y = u * x}$ **,**

sodass *f* nur noch von u abhängt -> f(u)

2. y nach x ableiten -> Separierbare DGL

$$y' = u' * x + u = f(u)$$

3. u durch Separation der Variabeln x,u bestimmen und am Ende y rücksubstituieren

$$\frac{du}{dx}\, x = f(u) - u$$

$$\frac{1}{f(u) - u}\, du = \frac{1}{x}\, dx$$

13. Grundlagen Ana I & II

Komplexe Zahlen

$$\boxed{z = x + i\,y = r * e^{i\,\varphi} = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi\,),\ z \in \mathbb{C}}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ \varphi = \arg(x, y)$$

$\bar{z} = x - i\,y$: *konjugiert komplexe Zahl*

x = Re{ z } = $\frac{z+\bar{z}}{2}$, y = Im{ z } = $\frac{z-\bar{z}}{2i}$

$$|z| = \sqrt{z * \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$e^{i\,\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad ; \quad \overline{e^{i\,\varphi}} = e^{-i\,\varphi}$$

$$\cos(z) = Re\{e^{i\,\varphi}\} = \frac{e^{i\,z} + e^{-i\,z}}{2}$$

$$\sin(z) = Im\{e^{i\,\varphi}\} = \frac{e^{i\,z} - e^{-i\,z}}{2i}$$

Vektoren

Skalarprodukt: $\vec{a} * \vec{b} = |a|\,|b|\cos\varphi$

Vektorprodukt: $\vec{a}\ x\ \vec{b} = -\vec{b}\ x\ \vec{a}$ (senkrecht zu a u. b)

$|\vec{a}\ x\ \vec{b}| = |a|\,|b|\sin\varphi$: Fläche des aufgesp. Parallelogramms

$$|x - a| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2}$$

Reihen

Geometrische Reihe: konvergiert mit $|x| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

Binominalreihe: für $|x| < 1$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} * x^k$$

Exponentialreihe

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\ ,\ \rho = \infty$$

- Exponentialfunk. wächst schneller als jede Potenz
- Logarithmus wächst langsamer als jede Potenz

$$e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!},\quad \sin h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Differenzialrechnung

Ableitungsregeln

Summenregel

$$\frac{d}{dx}\,(\,\lambda\,f(x) + \mu\,g(x)\,) = \lambda * f'(x) + \mu * g'(x)$$

Produktregel

$$\frac{d}{dx}\,(\,f(x) * g(x)\,) = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$$

Quotientenregel

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x) * g(x) - f(x) * g'(x)}{g(x)^2}$$

Kettenregel

$$\frac{d}{dx}\ f(\,g(x)\,) = f'(g(x)) * g'(x)$$

Umkehrsatz: Ableitung der Umkehrfunktion

$$f, g = f^{-1}: \qquad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Partielle Ableitungen: nach je einer Variabel differenzieren, Rest als konstant betrachten

Bernoulli – de l'Hôpital

Falls $lim\ (fx) = lim\ g(x) = 0\ /\ \infty$

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Taylor

Entwicklung bei x_0 , falls mindestens (n+1)-mal diff.bar

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k + R_n\,(x)$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots$$

Integration

Hauptsatz der Differenzialrechnung

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) \qquad (a, b \in I)$$

$$\frac{d}{dy}\int_a^y f(x)\,dx = f(y)$$

Eigenschaften des Integrals:

Vertauschen von Grenzen

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Additivität

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Integrationstechniken

Partielle Integration

$$\int u(t) * v'(t)\,dt = u(t) * v(t) - \int u'(t) * v(t)\,dt$$

Trick: $\int \log(x) = \int 1 * \log(x) = x * \log(x) - \ldots$

Substitution

1. $\varphi(t) \coloneqq x \rightarrow \quad dx = \varphi'(t)\,dt$

$$\int_a^b f(\varphi(t)) * \varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$$

2. $x \coloneqq \varphi(t)\,,\ dx \coloneqq \varphi'(t)\,dt$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,dt$$

Partialbruchzerlegung -> siehe Verschiedenes

Mehrdimensionale Integralrechnung

Variablensubstitution / Transformation

Integration in **Zylinderkoordinaten:**

$$dV = \boldsymbol{r}\,dr\,d\varphi\,dz$$

Integration in **Kugelkoordinaten:**

$$dV = \boldsymbol{r^2 \cos\vartheta}\,dr\,d\varphi\,d\vartheta$$

Zylinderkoordinaten

$$\begin{cases} x = r * \cos\varphi \\ y = r * \sin\varphi \\ z = z \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \arg(x,y) \\ z = z \end{cases}$$

Kugelkoordinaten

$$\begin{cases} x = r * \cos\vartheta\cos\varphi \\ y = r * \cos\vartheta\sin\varphi \\ z = r * \sin\vartheta \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \varphi \,\epsilon\, [\,0\,, 2\pi\,] \\ \vartheta \in [\frac{-\pi}{2}\,, \frac{\pi}{2}\,] \end{cases}$$

Mehrdimensionale Differentialrechnung

Mehrdimensionale Kettenregel

$$f\colon \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}\,, \quad g\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} f(g(t)) = (\nabla f)(g(t)) * g'(t)$$

$$= \frac{d\,f}{d\,g_1}(g(t)) * g_1'(t) + \ldots + \frac{d\,f}{d\,g_n}(g(t)) * g_n'(t)$$

Differentiation unter dem Integral

$$\frac{d}{dt}\int_B f(x,t)\,dx = \int_B \frac{d}{dt} f(x,t)\,dx$$

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{d}{dt} f(x,t)\,dx - f(a(t),t) * a'(t) + f(b(t),t) * b'(t)$$

Vektoranalysis

Linienintegral: *Zirkulation*

Skalares Linienintegral (Länge -> f = 1)

$$\int_\gamma f\,d|l| = \int_a^b f(\vec{\gamma}(t)) * |\vec{\gamma}'(t)|\,dt$$

Vektorielles Linienintegral

$$\int_\gamma \vec{K}\,d\vec{x} = \int_a^b \vec{K}(\vec{\gamma}(t)) * \vec{\gamma}'(t)\,dt$$

$$\int_\gamma \vec{K}\,d\vec{x} = \int_\gamma \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} d\vec{x} = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy$$

Satz von Green

Sei B eine Fläche in $\mathbb{R}^2$ und dB der Rand von B

$$\int_{dB} P\,dx + Q\,dy = \iint_B \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) d\mu(x,y)$$

Flächenberechnung

$$\mu(B) = \int_B 1\,d\mu = \int_{dB} x\,dy = -\int_{dB} y\,dx$$

Trick: $dx = dx * \frac{dt}{dt} = \frac{dx}{dt}\,dt = x'(t)\,dt$

Satz von Stokes: *Linienint. -> Flächenint.*

Dreidimensionale Verallgemeinerung des Satzes von Green
-> Berechnung der **Zirkulation** im Rand über die Fläche

$$\int_{dS} \vec{K}\, d\vec{s} = \int_{S} rot\, \vec{K} * \vec{n}\, d\omega$$

Divergenzsatz / Satz von Gauss: *Fläche -> Volumen*

Tangentialvektor: $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}} \binom{x'}{y'}$

$\vec{n}$ *ist der* ***nach aussen zeigende*** *Normaleneinheitsvektor*

Was am Rand rausfliesst, ist gleich dem im Innern Produzierten

$$\int_{d\Omega} \binom{P}{Q} \vec{n}\, ds = \int_{\Omega} \left(\frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy}\right) d\mu(x,y)$$

$$= \int_{\Omega} (div\, \vec{v})\, d\mu(x,y)$$

Differentialoperatoren

grad f	∇f	$\begin{bmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \partial_3 f \end{bmatrix}$
rot $\vec{K}$	$\nabla \times \vec{K}$	$\begin{bmatrix} \partial_2 K_3 - \partial_3 K_2 \\ \partial_3 K_1 - \partial_1 K_3 \\ \partial_1 K_2 - \partial_2 K_1 \end{bmatrix}$
div $\vec{K}$	$\nabla \cdot \vec{K}$	$\partial_1 K_1 + \partial_2 K_2 + \partial_3 K_3$
div grad f	Δf	$\partial_1^2 f + \partial_2^2 f + \partial_3^2 f$

$$\Delta f = \nabla * \nabla f$$

Verschiedenes

Logarithmus

$$log_a(x) = \frac{log_b\,(x)}{log_b\,(a)}$$

Kreis / Kugel

Kreis: $\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2}$

$Umfang:\ 2\pi\, r \qquad Fläche:\ \pi\, r^2$

Kugel: $\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 = r^2}$

$Fläche:\ 4\pi\, r^2 \qquad Volumen:\ \frac{4\pi}{3}\ r^3$

Partialbruchzerlegung

1. Polynomdivision, so dass

$$F(x) = P(x) + \frac{r(x)}{q(x)}\ , \qquad Grad(r) < Grad(q)$$

2. Nullstellen $a_1, \dots, a_n$ von q(x) finden:

Reelle Nullstellen n-ter Ordnung:

$$\frac{A_1}{(x-\ a_k)} + \frac{A_2}{(x-\ a_k)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-\ a_k)^n}$$

Paar komplexer Nullstellen n-ter Ordnung:

$$\frac{B_1 x +\ C_1}{(x-\ a_k)(x-\ \overline{a_k})} + \dots + \frac{B_n x\ +\ C_n}{[(x-\ a_k)(x-\ \overline{a_k})]^n} +$$

$$(x-\ a_k)(x-\ \overline{a_k}) = (x - Re)^2 + Im^2$$

4. Beide Seiten auf gemeinsamen Nenner -> **Koeffizientenvergleich**

(Einfache reelle NS: $A = \lim_{x\to a} (x-a) * \frac{r(x)}{q(x)}$)

5. Integration:

$$\int \frac{A_n}{(x-\ a_k)^n} = -\frac{1}{n-1} * \frac{A_n}{(x-\ a_k)^{n-1}}$$

$$\int \frac{Bx + C}{(x-\ Re)^2 + Im^2} = c_1 * \int \frac{\frac{d}{dx}[\,(x-Re)^2 + Im^2]}{(x-Re)^2 + Im^2} + c_2 * \int \frac{1}{(x-Re)^2 + Im^2}$$

$\rightarrow$ 1. $\log(\,(x - Re)^2 + Im^2)$; 2. $Subst{:}\, t = \frac{x - Re}{Im}$

Eigenwertproblem

Lösen des charakteristischen Polynoms chp(λ) :

$$\det(A -\ \lambda\, I_n\,) = 0$$

Bei einer Dreiecksmatrix sind die EW in der Diagonalen.

Eigenschaften der Fourier-Transformation

Eigenschaft	$f(x)$	$\widehat{f}(\omega)$
Linearität	$\lambda f(x) + \mu g(x)$	$\lambda \widehat{f}(\omega) + \mu \widehat{g}(\omega)$
Ähnlichkeit	$f(ax) \quad a > 0$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} \widehat{f}(\frac{\omega}{a})$
Verschiebung	$f(x-a)$	$e^{-ai\omega} \widehat{f}(\omega)$
	$e^{aix} f(x)$	$\widehat{f}(\omega - a)$
Ableitung	$f^{(n)}(x)$	$(i\omega)^n \widehat{f}(\omega)$
	$x^n f(x)$	$i^n \widehat{f}^{(n)}(\omega)$
Faltung	$f(x) * g(x)$	$\widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega)$

11. Tabellen

$$\tan' x = 1 + \tan^2 x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$2 * \cos(x)^2 * \sin(x)^2 = \frac{1}{2}\sin(2x)^2$$

Grad	Rad	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\tan\varphi$
$0°$	0	0	1	0
$30°$	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\frac{1}{2}\pi$	1	0	
$120°$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$135°$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$150°$	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$180°$	π	0	-1	0

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

Grenzwerte

$$\lim_{x\to\infty} a^x = 0 \qquad (|a| < 1)$$
$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{a} = 1 \qquad (a \in \mathbb{R}^+)$$
$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x!} = 0 \qquad (a \in \mathbb{R})$$
$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a \qquad (a \in \mathbb{R})$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a \qquad (a \in \mathbb{R})$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a \qquad (a \in \mathbb{R}^+)$$
$$\lim_{x\to\infty+} \left[x(\log x)^n\right] = 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^n}{x} = 0 = 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Doppelwinkel-Funktionen

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi \qquad \sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\varphi)$$
$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \qquad \cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\varphi)$$
$$\tan 2\varphi = \frac{2\tan\varphi}{1 - \tan^2\varphi} \qquad \tan^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos\varphi}{1 + \cos\varphi}$$

$$1 - \cos 2\varphi = 2\sin^2\varphi$$
$$1 + \cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi$$

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 * \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) * \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

Reihenentwicklungen

$$e^x = 1 + x + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$
$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$$
$$(1 + x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k}x^k$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$
$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$
$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$
$$\operatorname{artanh} x = x + \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Summe der ersten n-Zahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Ableitungen

Potenz- und Exponentialfunktionen			Trigonometrische Funktionen		Hyperbolische Funktionen	
$f(x)$	$f'(x)$	Bedingung	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$	$\sin x$	$\cos x$	$\sinh x$	$\cosh x$
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{Z}_{<0},\ x \neq 0$	$\cos x$	$-\sin x$	$\cosh x$	$\sinh x$
x^a	ax^{a-1}	$a \in \mathbb{R},\ x > 0$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\log x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
e^x	e^x		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
a^x	$a^x \cdot \log a$	$a > 0$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Stammfunktionen

$f(x)$	$F(x)$	Bedingung	$f(x)$	$F(x)$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$	$\frac{1}{x}$	$\log \lvert x \rvert$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$n \in \mathbb{Z}_{\leq -2},\ x \neq 0$	$\tan x$	$-\log \lvert \cos x \rvert$
x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$	$a \in \mathbb{R},\ a \neq -1,\ x > 0$	$\tanh x$	$\log(\cosh x)$
$\log x$	$x \log x - x$	$x > 0$	$\sin^2 x$	$\frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$
e^{ax}	$\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}$	$a \neq 0$	$\cos^2 x$	$\frac{1}{2}(x + \sin x \cos x)$
a^x	$\frac{a^x}{\log a}$	$a > 0,\ a \neq 1$	$\tan^2 x$	$\tan x - x$

Standart-Substitutionen

Integral	Substitution	Ableitung	Bemerkung
$\int f(x,\ x^2+1)\,\mathrm{d}x$	$x = \tan t$	$\mathrm{d}x = \tan^2 t + 1\,\mathrm{d}t$	$t \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$
$\int f(x,\ \sqrt{ax+b})\,\mathrm{d}x$	$x = \frac{t^2-b}{a}$	$\mathrm{d}x = \frac{2}{a} t\,dt$	$t \geq 0$
$\int f(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x$	$x + \frac{b}{2a} = t$	$\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$	$t \in \mathbb{R}$, quadratische Ergänzung
$\int f(x,\ \sqrt{a^2-x^2})\,\mathrm{d}x$	$x = a \sin t$	$\mathrm{d}x = a \cos t\,\mathrm{d}t$	$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2},\ 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$
$\int f(x,\ \sqrt{a^2+x^2})\,\mathrm{d}x$	$x = a \sinh t$	$\mathrm{d}x = a \cosh t\,\mathrm{d}t$	$t \in \mathbb{R},\ 1 + \sinh^2 x = \cosh^2 x$
$\int f(x,\ \sqrt{x^2-a^2})\,\mathrm{d}x$	$x = a \cosh t$	$\mathrm{d}x = a \sinh t\,\mathrm{d}t$	$t \geq 0,\ \cosh^2 x - 1 = \sinh^2 x$
$\int f(\mathrm{e}^x, \sinh x, \cosh x)\,\mathrm{d}x$	$\mathrm{e}^x = t$	$\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$	$t > 0,\ \sinh x = \frac{t^2-1}{2t},\ \cosh x = \frac{t^2+1}{2t}$
$\int f(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$	$\tan \frac{x}{2} = t$	$\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$	$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Ansätze für inhomogene DGL mit konstanten Koeffizienten

Störfunktion $K(t)$	Spektralbedingung	Ansatz für $y_p(x)$
x^r	$0 \notin \operatorname{spec} L$	$A_0 + A_1 x + \cdots + A_r x^r$
	$0 \in \operatorname{spec} L$, m-fach	$A_0 x^m + A_1 x^{m+1} + \cdots + A_r x^{m+r}$
$b_0 + b_1 x + \cdots + b_r x^r,\ b_i \in \mathbb{R}$	$0 \notin \operatorname{spec} L$	$A_0 + A_1 x + \cdots + A_r x^r$
$\mathrm{e}^{\lambda_0 x},\ \lambda_0 \in \mathbb{C}$	$\lambda_0 \notin \operatorname{spec} L$	$A\mathrm{e}^{\lambda_0 x}$
	$\lambda_0 \in \operatorname{spec} L$, m-fach	$Ax^m \mathrm{e}^{\lambda_0 x}$
$\cos(\omega x),\ \sin(\omega x)$	$\pm \mathrm{i}\omega \notin \operatorname{spec} L$	$A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$
	$\pm \mathrm{i}\omega \in \operatorname{spec} L$, einfach	$x(A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x))$
$x^2 \mathrm{e}^{-x}$	$-1 \notin \operatorname{spec} L$	$(A_0 + A_1 x + A_2 x^2)\mathrm{e}^{-x}$