TechMech Zusammenfassung

Andreas Biri, D-ITET 31.07.13

1. Grundlagen

Zylinderkoordinaten

$$\vec{r} = \varrho * \overrightarrow{e_\varrho} + z * \overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{e_\varrho} = \cos\varphi\ \overrightarrow{e_x} + \sin\varphi\ \overrightarrow{e_y}, \qquad \overrightarrow{e_\varphi} = -\sin\varphi\ \overrightarrow{e_x} + \cos\varphi\ \overrightarrow{e_y}$$

$$\vec{v} = \dot{\varrho}\,\overrightarrow{e_\varrho} + \varrho * \dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_\varphi} + z * \overrightarrow{e_z}$$

Freiheitsgrade

minimale Anzahl benötigter Lagekoordinaten
Zahl d. freien Geschwindig. – und Rotationskomponenten

$$f = n - b$$

n : Freiheitsgrade d. einzelnen Körper

b : lin. unabhängige Bindungsgleichungen

Starrer Körper: FG 6 im Raum, FG 3 in der Ebene

Geschwindigkeit & Schnelligkeit

Geschwindigkeit:

$$\vec{v} = \frac{dr(t)}{dt} = \dot{x}\,\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\,\overrightarrow{e_y} + \dot{z}\,\overrightarrow{e_z} = \dot{r}$$

Schnelligkeit:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

Satz der projizierten Geschwindigkeiten (SdpG)

Bei einem starren Körper verschieben sich die Punkte in d. gleiche Richtung

$$\overrightarrow{v_P}' = \overrightarrow{v_Q}' \quad \triangleq \quad |\overrightarrow{v_P}| * \cos\alpha = |\overrightarrow{v_Q}| * \cos\beta$$

$$\overrightarrow{v_P} * \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{v_Q} * \overrightarrow{PQ}$$

Ebene & räumliche Bewegungen

Eine starre ebene Bewegung ist entweder eine

Translation: alle Punkte haben parallele Geschwindigk.

Rotation: min. zwei Punkte haben nichtparallele Geschw.

Bei räumlichen Bewegungen unterscheidet man:

Kreiselung: ein Punkt des Körpers bleibt fixiert (mom. Rotation)

Schraubung: Rotation um Achse sowie Translation entlang der Rotationsachse

Satz vom Momentanzentrum

Bei einer Rotation um das Momentanzentrum M gilt:

$$|\overrightarrow{v_P}| = \omega * |\overrightarrow{r_P}| \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{v_P} = \vec{\omega}\ x\ \overrightarrow{r_P}$$

Polbahn: Kurve des Mom.zentrum im Verlauf der Bewegung

Kinemate

Die Geschwindigkeit eines Punktes setzt sich zusammen aus dessen **Translationsgeschwindigkeit** $\overrightarrow{v_B}$ und der **Rotationsgeschwindigkeit** $\vec{\omega}$

$$Kinemate: \{\overrightarrow{v_B}, \vec{\omega}\}$$

$$\overrightarrow{v_P} = \overrightarrow{v_B} + \vec{\omega}\ x\ \overrightarrow{r_{BP}}$$

Die **Invarianten der Kinematen** sind unabhängig vom Bezugssystem:

$$I_1 = \vec{\omega} \quad ; \quad I_2 = \vec{\omega} * \overrightarrow{v_B}$$

Translation:	$I_1 = \vec{\omega} = \mathbf{0}$	$(\overrightarrow{v_M} = \overrightarrow{v_B})$
Rotation:	$I_1 \neq 0\ , I_2 = 0$	$\omega \perp Bewegungsebene$
Schraubung:	$I_2 \neq 0$	

Drehmoment M [Nm]

Das Drehmoment ist vom Bezugspunkt abhängig:

$$\overrightarrow{M_0} = \overrightarrow{r_{OP}}\ x\ \vec{F}$$

Kann Kraft entlang Wirkungslinie verschieben!

$$\rightarrow \quad |\overrightarrow{M_0}| = d * F \qquad Vorzeichen\ aus\ Korkenzieherregel$$

Moment bezüglich Achse

1. Projiziere Kraft auf Ebene senkrecht zu Achse
2. Multipliziere Betrag mit Abstand zur Achse d
3. Vorzeichen aus Korkenzieherregel

Lote auf Geschwindigkeiten geben Momentanzentrum
Auflager sind stets Momentanzentren

Leistung P [1 W = 1 J/s]

$$P = \overrightarrow{F_Q} * \overrightarrow{v_Q}$$

leistungslos : $P = 0 \rightarrow F_Q \perp v_Q$

Bei reiner Rotation gilt:

$$P = \overrightarrow{M_0} * \vec{\omega}$$

2. Statik

Reduktion von Kräftegruppen

Resultierende $\vec{R}$: Summe der Kräfte der Kräftegruppe

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F_i}$$

Resultierendes Moment $\overrightarrow{M_O}$ zum Bezugspunkt O:

$$\overrightarrow{M_O} = \sum_i \vec{r_i}\ x\ \vec{F_i}$$

Gesamtleistung P bei einer Starrkörperbewegung

$$P = \vec{R} * \overrightarrow{v_B} + \overrightarrow{M_B} * \vec{\omega}$$

Statische Äquivalenz

1. $P\left(\{\vec{F_i}\}\right) = P\left(\{\vec{G_i}\}\right) \;\forall\, \{\overrightarrow{v_B}, \vec{\omega}\}$

2. Dynamen (Resultierende u. resultierendes Moment) gleich

Für zwei Kräfte : vektoriell gleich und selbe Wirkungslinie

Kräftepaar: *„freies Moment"*

Besteht aus *zwei Kräften gleichen Betrags in entgegengesetzte Richtung:*

$$\vec{R} = 0\,;\;\; \vec{M} = \vec{r} \, x \, \vec{F} \;\;;\;\; M = d * F$$

Moment ist unabhängig von Bezugspunkt!

Dyname

Eine Kräftegruppe wird durch ihre Dyname bestimmt:

$$Dyname\colon \{\, \vec{R} \;\;,\;\; \overrightarrow{M_O} \,\}$$

$\vec{R}$: Resultierende
$\overrightarrow{M_O}$: Resultierendes Moment

Transformationsregel

$$\overrightarrow{M_P} = \overrightarrow{M_O} + \overrightarrow{r_{PO}} \, x \, \vec{R}$$

Die **Invarianten der Dynamen** sind unabhängig vom Bezugssystem:

$$I_1 = \vec{R} \;\;;\;\; I_2 = \vec{R} * \overrightarrow{M_O}$$

Nullsystem: $\vec{R} = 0\,,\; \overrightarrow{M_O} = 0$

Kräftepaar: $\vec{R} = 0\,,\; \overrightarrow{M_O} \neq 0$

Einzelkraft: $\vec{R} \neq 0\,,\; I_2 = 0$

Schraube: $I_2 \neq 0$

Schwerpunkt / Kräftemittelpunkt

$$\overrightarrow{r_c} = \frac{1}{M}\int_B \vec{r}\, dm = \frac{1}{M}\sum_i m_i * \overrightarrow{r_i}$$

Für homogene Verteilung:

$$\overrightarrow{r_c} = \frac{1}{V}\int_B \vec{r}\, dV = \frac{1}{V}\sum_i V_i * \overrightarrow{r_{c_i}}$$

$$\overrightarrow{r_c} = \frac{1}{A}\int_A \vec{r}\, dA = \frac{1}{A}\sum_i A_i * \overrightarrow{r_{c_i}}$$

Kräftemittelpunkt: $G * \overrightarrow{r_c} = \sum_i G_i * \overrightarrow{r_i}$

$$\overrightarrow{r_c} = \frac{1}{R}\sum_i F_i * \overrightarrow{r_{c_i}}$$

Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL)

Ein System ist genau dann in Ruhelage, wenn virtuelle Gesamtleistung für alle Bewegungszustände verschwindet:

$$\tilde{P} = \tilde{P}^{(innen)} + \tilde{P}^{(aussen)} = 0 \quad \forall\{\tilde{v}\}$$

Gilt auch für konstante (Rotations-) Geschwindigkeiten

Zulässiger virtueller Bewegungszustand: verletzt keine Bindungen

Hauptsatz der Statik

Ein starrer Körper befindet sich genau dann in einer Ruhelage, wenn die äusseren Kräfte im Gleichgewicht sind:

$$\vec{R} = 0 \;\;,\;\; \overrightarrow{M_O} = 0$$

Statische Bestimmtheit

Bindung: Einschränkung der Bewegungsfreiheit

Statisch bestimmt:

$$\#\,Unbekannte = \#\,lin.unabh.Gleichungen$$

Statisch unbestimmt: „klemmt"

$$\#\,Unbekannte > \#\,lin.unabh.Gleichungen$$

Grad der Unbestimmtheit: $\#\,Unbekannte - \#\,Gleichungen$

Kinematisch bestimmt: falls aufgrund der Lagerung keine zulässigen (Starrkörper-) Bewegungen mehr möglich sind

Kinematisch unbestimmt : System ist beweglich ; kann nicht statisch bestimmt sein

Reibung

Haftreibungskraft

$$|F| < \mu_0 * |N| \qquad \mu_0\; Haftreibungskoeffizient$$

Stellt zusätzliche Unbekannte dar und dient lediglich nachträglich zur Überprüfung, ob Ruhe wirklich möglich ist.

Gleitreibungskraft

$$|F| = \mu_1 * |N| \qquad \mu_1\; Gleitreibungskoeffizient$$

Entgegen d. Bewegungsrichtung: $\vec{F} = -\mu_1 * |N| * \frac{\overrightarrow{v_B}}{|v_B|}$

Liefert stets eine zusätzliche Gleichung zum Lösen des GS

Rollwiederstand (Deformation)

$$|M_f| \leq \mu_2 * |N|$$

In Bewegung (entgegengesetzt zu Rotationsrichtung):

$$|M_f| = \mu_2 * |N| \;\;,\qquad \overrightarrow{M_f} = -\mu_2 * |N| * \frac{\vec{\omega}}{|\omega|}$$

ideal rau: $\mu_0 = \infty\,,\; \mu_2 = 0$

3. Dynamik

Beschleunigung: $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x} * e_x + \ddot{y} * e_y + \ddot{z} * e_z$

Trägheitskraft: Trägheitskraftdichte ρ

$$\boldsymbol{f}^{(t)} = -\rho\, \boldsymbol{a} \quad ; \quad d\,F^{(t)} = -\rho\, \boldsymbol{a}\, dV = -\boldsymbol{a}\, dm$$

$$\tilde{\boldsymbol{P}}^{(trägheit)} + \tilde{\boldsymbol{P}}^{(innen)} + \tilde{\boldsymbol{P}}^{(aussen)} = \boldsymbol{0} \quad \forall \{\tilde{\boldsymbol{v}}\}$$

Newton'sches Bewegungsgesetz

$$\vec{R} = m * \vec{a}$$

Massenmittelpunktsatz: kann ausgedehnter Körper wie Massenpunkt im Schwerpunkt betrachten

Kinetische Energie

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\, m * v^2$$

Impuls

$$\vec{p} = m * \vec{v} = \iiint_B v\, dm$$

Impulssatz / Massenmittelpunktsatz

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \vec{\boldsymbol{R}} = \frac{d}{dt}\,(m * \vec{v_C}) = m * \vec{a_C}$$

Impulserhaltung

$$m_1 * v_1 + m_2 * v_2 = m_1 * v_1{}' + m_2 * v_2{}'$$

Inelastischer Stoss: $v_1' = v_2' = v'$

Elastischer Stoss (Energieerhaltung) :

$$m_1 * v_1^2 + m_2 * v_2^2 = m_1 * v_1'^2 + m_2 * v_2'^2$$

Stosszahl k : $(v_2' - v_1') = k * (v_1 - v_2)$

k = 0 : vollkommen inelastisch ; k = 1 : vollkommen elastisch

Drallsatz

Drallsatz bezüglich inertialen (in Ruhe) Punkts O

$$M_O = \iiint \boldsymbol{r\, x\, a}\, dm$$

$$L_O = \iiint \boldsymbol{r\, x\, v}\, dm$$

$$\dot{\boldsymbol{L}_O} = \boldsymbol{M_O}$$

Drallsatz bezüglich dem Massenmittelpunkt C

$$L_C = \iiint \boldsymbol{r'\, x\, v'}\, dm$$

$$\dot{\boldsymbol{L}_C} = \boldsymbol{M_C}$$

Umrechnungsformel

$$\boldsymbol{L_O = r_C\, x\, p + L_C}$$

DS bezüglich 0: praktisch für Kreiselung um O

DS für relativen Drall: gut für beschleunigt bewegtes C

Drallsatz für ebene Bewegungen

$$L_O = I_O * \omega = I_O * \dot{\varphi}$$

$$\dot{L_O} = I_O * \dot{\omega} = M_O$$

Drallrichtung und Moment besitzen selben Richtungssinn !

Massenträgheitsmoment I_O

$$\boldsymbol{I_O} = \iint_B \boldsymbol{r^2\, dm}$$

Drallsatz bezüglich des Massenmittelpunktes C

$$L_C = I_C * \omega \quad ; \quad \dot{L_C} = I_C * \dot{\omega} = M_C$$

Kinematische Relation $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{r} * \dot{\boldsymbol{\varphi}}$?

Trägheitsmomente einfacher Körper

Massenpunkt im Abstand r	$I = mr^2$
Stabmitte, Querachse	$I = \frac{ml^2}{12}$
Stabende, Querachse	$I = \frac{ml^2}{3}$
Rolle, Mittelpunkt	$I = \frac{mR^2}{2}$

4. Problemlösungsverfahren

PdvL : für einzelne Kräfte

1. **Stab ausschneiden** , Zugkräfte einführen
2. **Bewegungszustand wählen:** zB. führe Rotation ω ein, s.d. immer noch wirkliche Bewegung und Lagerungskräfte sollen nicht bei Leistungsberechnung vorkommen
3. -> P = 0 , auflösen auf gesuchte Variabel

HS : für alle Lager- und Bindungskräfte

Komponentenbedingungen (KB) : $R = 0$

Momentenbedingungen (MB) : $M_O = 0$

1. Wenn möglich bei Schnittpunkten; will diese ja meistens nicht berechnen, sollen nicht vorkommen in Gleichung
2. freies Moment darf überall angesetzt werden!

+ Zusatzbedingungen:

1. $S > 0$: Seilkraft immer positiv, da nur Zugkraft möglich
2. falls $Z < 0$: **Knickgefahr** bei Pendelstütze

$Z > 0 : Zugstab \quad ; \quad Z < 0 : Druckstab$

Kinematische Relation: Sind Koordinaten miteinander verbunden? (zB. Rolle $\dot{x} = \dot{y}$)

Anwendung des Hauptsatzes der Statik

1. System freischneiden und angreifende Kräfte einführen:
   - Gewichtskräfte greifen im Schwerpunkt an
   - Seil- und Stabkräfte als Zugkräfte
   - Normalkräfte senkrecht zu r Bewegungsebene (eventuell weitere Unbekannte für Angriffspunkt)
3. Zweckmässiges Koordinatensystem finden
3. Gleichgewichtsbedingungen formulieren (KB, MB)
4. Gleichungen und Unbekannte abzählen; bei zu vielen Unbekannten aufschneiden
5. Lösen und Resultate diskutieren
   - Ist Seil gespannt: $S > 0$?
   - Körper kippt nicht: $N > 0, innerhalb\ Körper$?
   - Körper bleibt in Ruhe: $|F| < \mu_0 * |N|$

Lösung von Dynamikproblemen

1. System freischneiden und in allgemeiner Lage angreifende Kräfte einführen
2. Zweckmässiges Koordinatensystem aufstellen und kinematische Relationen aufstellen.
3. Differentialgleichungen mittels Massenmittelpunktsatz und Drallsatz aufstellen
4. Bindungskräfte bestimmen und aus den Bewegungsgleichungen eliminieren
5. Anfangsbedingungen formulieren und gesuchte Grössen berechnen
6. Resultat diskutieren: zB. $Eigenfrequenz\ \ddot{x} + \omega^2 x = 0$

5. Verschiedenes

DGL-Lösungen

$\ddot{x} = k$ $\qquad$ $x(t) = \frac{k}{2}\, t^2 + A * t + B$

$\ddot{x} + \omega^2 * x = k$ $\qquad$ $x(t) = \frac{k}{\omega^2} + A * cos(\omega t) + B * sin(\omega t)$

$\rightarrow Kreisfrequenz\ \omega\ ,\quad Periode\ T = \frac{2\pi}{\omega}$

$\ddot{x} - \lambda^2 * x = k$ $\qquad$ $x(t) = -\frac{k}{\omega^2} + A * e^{\lambda t} + B * e^{-\lambda t}$

Rollendes Rad

$$x = R(\varphi - sin\ \varphi) \ ; \quad y = R(1 - cos\ \varphi)$$

$$v_x = R\,\dot{\varphi}\,(1 - cos\ \varphi) \ ; \quad v_y = R\,\dot{\varphi}\ sin\ \varphi$$

$$a_x = R\,\ddot{\varphi}\,(1 - cos\ \varphi) + R\,\dot{\varphi}^2\ sin\ \varphi$$

$$a_y = R\,\ddot{\varphi}\ sin\ \varphi + R\,\dot{\varphi}^2\ cos\ \varphi$$

$\underline{falls\ \dot{\varphi} = \ \omega\ konstant}$

$$a_x = \ R\,\dot{\varphi}^2\ sin\ \varphi \ ; \ a_y = \ R\,\dot{\varphi}^2\ cos\ \varphi$$

Zylinderkoordinaten

$$\vec{v} = \dot{\varrho}\,\overrightarrow{e_\varrho} + \varrho * \dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_\varphi} + z * \overrightarrow{e_z}$$

$$\rightarrow a = (\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\varphi}^2)\, e_\rho + (\rho\,\ddot{\varphi} + 2\,\dot{\rho}\,\dot{\varphi})\, e_\varphi + \ddot{z}\, e_z$$

Polarkoordinaten: $\ddot{z} = 0$

Kreiskoordinaten: $\ddot{z} = 0\ ,\ \dot{\rho} = 0$

Energieerhaltung

In einem geschlossenen System ist die Summe der potentiellen und kinetischen Energie konstant:

$$E_{tot} = m * g * h + \frac{1}{2} * m * v^2 = const.$$

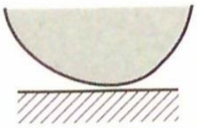
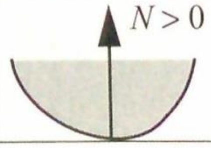
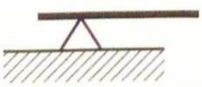
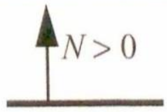
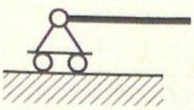
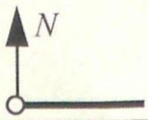
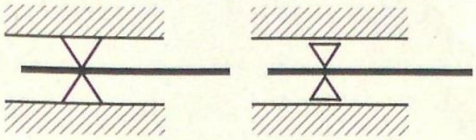
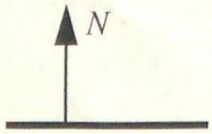
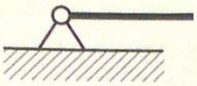
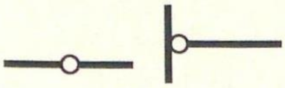
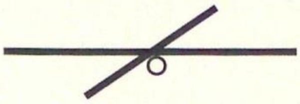
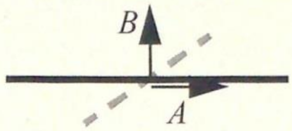
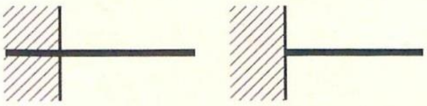
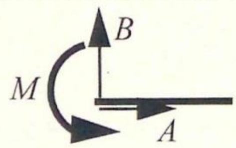
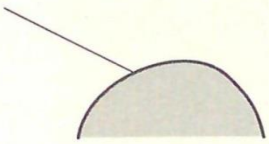
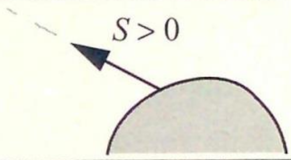
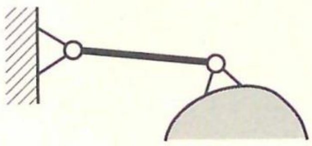
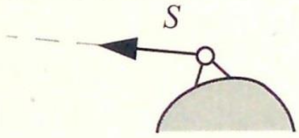
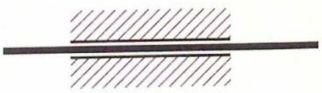
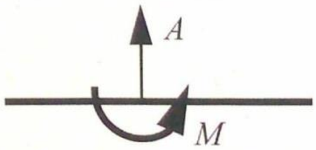
Winkel & Approximationen

$\sin\varphi \approx \varphi \quad ; \quad \cos\varphi \approx 1 \quad ; \tan\varphi \approx \varphi$

Grad	Rad	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\tan\varphi$
$0°$	0	0	1	0
$30°$	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\frac{1}{2}\pi$	1	0	
$120°$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$135°$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$150°$	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$180°$	π	0	-1	0

Schwerpunkte ebener Flächen

	$\mathbf{x_c}$	$\mathbf{y_c}$
Rechteck	$\frac{x_1+x_2}{2}$	$\frac{y_1+y_2}{2}$
Dreieck	$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$	$\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$
Halbkreis	0	$\frac{4R}{3\pi}$
Viertelkreis	$\frac{4R}{3\pi}$	$\frac{4R}{3\pi}$

Auflager (einseitig)		
Auflager (einseitig) *Loslager*		
Auflager (beidseitig) *Loslager*		
Auflager (beidseitig) *Kurzes Querlager* *Loslager*		
Gelenk *Festlager*		
Gelenk		
Gelenk (zwei gelenkig ver- bundene Balken)		
Einspannung		
Faden / Seil		
Pendelstütze (keine Kräfte am Stab) Gewicht vernach- lässigbar		
Parallelführung		
Langes Querlager, ***Schiebehülse***		
Längs- und ***kurzes Querlager***