# Lineare Algebra Zusammenfassung

Andreas Biri, D-ITET 2013 31.07.13

# Lineares Gleichungssystem

## *Gauss- Zerlegung*

*Lösungsmenge:* Menge aller Lösungen eines linearen Gleichungssystems (GS)

*Äquivalentes GS*: 1) Vertauschen v. Zeilen 2) Addition eines Vielfachen einer Z. zu anderen

**Gauss**
1. Pivot finden im Eliminationsschema, s.d. Pivot ≠ 0 ( wenn möglich 1!)
   -> falls alle Koeff. der Spalten = 0 -> *freier Parameter,* da unbestimmbar
2. Von anderen Zeilen *Koeffizient/Pivot* * Pivot-Zeile subtrahieren -> Var. eliminieren
3. Falls triviale Lösung ( x = … ) im Endschema
   -> *Verträglichkeitsbedingungen*: Muss auflösen können ( NICHT 0 0 = 5)
   -> wenn ja: *Rückwärtseinsetzen*

*r* : *Rang*, Anzahl Nicht-Nullzeilen / Pivot-Variablen im Hauptteil, r ≤ m , r ≤ n

*m* : Gleichungen *n* : Unbekannte

*Freie Parameter*: n – r freie Parameter, entspricht Anzahl Nullzeilen

Für *Koeffizientenmatrix* A und Spaltenvektor x = $\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ :

A * x = b A * x : *Hauptteil* ; b : *rechte Seite*

**Satz 1.1 – 1.7** :

i) Das GS hat mindestens eine Lösung, wenn r = m oder r < m und $c_i = 0$, i = r+1, …, m
ii) Lösung eines lin. GS ist genau dann eindeutig, falls r = n .
iii) Ein homogenes GS hat eine nichttriviale Lösung, wenn r < n ist (da dann freie Paras).
iv) Ein lin. GS ist genau dann *für beliebige rechte Seiten lösbar, wenn* r = m .
v) Für m = n ist genau dann eindeutig, wenn für jede rechte Seite lösbar.
vi) Für m = n ist lin. GS für jede rechte Seite lösbar, wenn das dazugehörige homogenes System nur die triviale Lösung besitzt.

## *LR – Zerlegung*

Aufwand Gauss für reguläre n x n Matrix : $\frac{n^3}{3} - \frac{n}{3}$

**LR: für jede Koeffizientenmatrix nur einmal ausrechnen!** -> danach Aufwand $n^2$

L : Speichern der Quotienten *Koeffizient / Pivot* in leeren Nullstellen für später

- ACHTUNG bei 0-Spalten : Speichern in gleicher Spaltennummer wie Zeilennummer des Pivots nach Permutationstausch (überspringe Eliminationsschritt, aber nicht L-Spalte)

*Permutationsmatrix P* : Einheitsmatrix $I_n$, um Zeilentausche zu rekonstruieren

L (ohne Einsen) und R können aus dem erweiterten Endschema abgelesen werden

| **LR** | | | |
|---|---|---|---|
| | 1. LR – Zerlegung von A: | Mit Gauss L, R u. P bestimmen, s.d. | P A = L R |
| | 2. Vorwärtseinsetzen: | Auflösen nach c | L c = P b |
| | 3. Rückwärtseinsetzen: | Bestimme die Lösung x des GS | R x = c |

$$PA = LR, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{mn} \end{pmatrix}$$

R: Gaussendschema, L: Faktoren der Gausszerlegung
P: Permutationsmatrix ( $I_n$ mit Zeilenvertauschungen)

## *Rang einer Matrix:* entspricht Rang des lin. Gleichungssystems A * x = 0

- A regulär ↔ Rang A = n

**Satz 6.2:** Sei A eine m x n Matrix, $B_1$ reguläre m x m, $B_2$ reguläre n x n Matrix.

i) $Rang\ A = Rang\ A^T$ [Spaltenrang = Zeilenrang]
ii) $Rang\ B_1 A = Rang\ A$
iii) $Rang\ A\, B_2 = Rang\ A$

# Matrizen

*m x n Matrix* : m Zeilen ( i, →) , n Spalten ( j, ↓ ) mit m*n Elementen $a_{ij}$

*quadratische Matrix* : n * n, gleich viele Spalten wie Zeilen

*obere / Rechts- Dreiecksmatrix* : alle Elemente unter der Diagonalen = 0

*untere / Links- Dreiecksmatrix* : alle Elemente über der Diagonalen = 0

*Diagonalmatrix* : lediglich Diagonalelemente, D = diag( $d_{11}$, $d_{22}$, … )

*Einheitsmatrix / Identität* : $I_n$ = diag( 1, 1, …)

Matrixprodukt A * B : $\sum_{k=1}^{n}(A)_{ik} * (B)_{kj}$ , wobei resultierende Matrix # $\text{Zeilen}_A$ * # $\text{Spalten}_B$
existiert lediglich, falls A gleich viele Spalten wie B Zeilen hat. AB ≠ BA

**Satz 2.1 :** i) Kommutativgesetz: A + B = B + A
ii) Assoziativgesetz Addition: ( A + B ) + C = A + ( B + C )
iii) Assoziativgesetz Multiplikation: ( AB ) * C = A * ( BC )
iv) Distributivgesetz: ( A + B ) * C = AC + BC , A * (C + B) = AC + AD

**Satz 2.2, 2.3, 2.5 :** $a^{(i)}$ = Spaltenvektor n x 1 ; $a^{[i]}$ = Zeilenvektor 1 x n

i) $A * e^{(i)} = a^{(i)}$ = *i*-ter Spaltenvektor von A
ii) $A * x = x_1 * a^{(1)} + x_2 * a^{(2)} + \ldots$
iii) $AB = ( Ab^{(1)} \ Ab^{(2)} \ \ldots \ Ab^{(p)} )$
iv) e[i] * B = b[i] = *i*-ter Zeilenvektor von B
v) $y * B = y_1 * b^{[1]} + y_2 * b^{[2]} + \ldots$
vi) $AB = ( a^{[1]}B \ \ldots \ a^{[n]}B )^T = a^{(1)}b^{[1]} + a^{(2)}b^{[2]} + \ldots + a^{(n)}b^{[n]}$

*Transponierte Matrix :* $(A^T)_{ij} := (A)_{ji}$ -> Spiegeln an der Diagonalen: m x p -> p x m

***symmetrisch* : falls $A^T = A$**

**Satz 2.4** : i) $(A^T)^T = A$
ii) $(A + B)^T = A^T + B^T$
iii) $(AB)^T = B^T * A^T$

## *Inverse einer quadratischen Matrix*

Matrix X ist *Inverse* von A, falls: $A * X = I_n$ -> $X = A^{-1}$

*regulär / invertierbar* : falls A eine Inverse hat ( Inverse ist eindeutig bestimmt!)

*singulär* : falls A keine Inverse hat

**Satz 2.7** : i) $A^{-1} * A = I_n$
ii) $(A^{-1})^{-1} = A$
iii) $I_n^{-1} = I_n$
iv) $( AB )^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
v) $( A^T )^{-1} = (A^{-1})^T$

**Satz 2.8** : Für n x n Matrix A sind folgende Aussagen äquivalent:
i) A ist regulär / invertierbar.
ii) Das Gleichungssystem Ax = b ist für jedes b lösbar.
iii) Das Gleichungssystem Ax = 0 hat nur die triviale Lösung x = 0 ( -> Rang = n)

**Inverse einer $2 \times 2$-Matrix:**

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

**Inverse einer $3 \times 3$-Matrix:**

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} ei-fh & ch-bi & bf-ce \\ fg-di & ai-cg & cd-af \\ dh-eg & bg-ah & ae-bd \end{pmatrix}$$

*Berechnung mittels Gauss*

1. $Ax = I_n$ , Gleichungssystem aufstellen und Lösen
2. Umformen, so dass links die Einheitsmatrix steht

-> rechts ist die Inverse der Matrix A

*Orthogonale Matrix*

Matrix A heisst orthogonal, falls: $A^T * A = I_n$ -> $A^T = A^{-1}$

**Satz 2.9** : Seien A und B orthogonale n x n Matrizen.

i) A ist invertierbar und $A^{-1} = A^T$

ii) $A^{-1}$ ist orthogonal.

iii) AB ist orthogonal.

iv) $I_n$ ist orthogonal.

**Givensrotation**

$$U(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$U(\varphi)^T = U(-\varphi)$$

**Householdermatrix** Sei u ein Spaltenvektor mit

$$u^T u = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 1.$$

Dann ist $uu^T$ eine n x n-Matrix mit $(uu^T)_{ij} = u_i\, u_j$ . Die *Householdermatrix ist symmetrisch und orthogonal*:

$$Q := I_n - 2uu^T$$

# Determinanten (nur für quadratische Matrizen)

Die Determinante $|A|$ = det (A) charakterisiert, ob die Matrix regulär oder singulär ist.

**Berechnung:** (1.Teil – 2. Teil + 3. Teil - ...)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a * d - c * d$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a * \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d * \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g * \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

**Satz 3.1, Satz 3.6, Satz 3.8** :

i) Werden 2 Zeilen vertauscht, so wechselt $|A|$ ihr Vorzeichen.

ii) Wird ein Vielfaches einer Zeile addiert, bleibt sie unverändert.

iii) Wird eine Zeile mit α multipliziert, so wird auch $|A|$ mit α multipliziert.

iv) det ( AB ) = det (A) * det (B)

v) falls A invertierbar ( det A ≠ 0 ) : $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

**Folgerungen:**

1) Die Determinante einer Matrix mit zwei gleichen Zeilen ist gleich null.

2) Die Determinante einer Matrix, die eine Zeile aus lauter Nullen enthält, ist gleich null.

**Lemma 3.2** : Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist gleich dem Produkt ihrer Diagonalelemente ( det (D) = $d_{11} * d_{22} * ... * d_{nn}$ ) (normale Matrix -> Gauss)

**Satz 3.3** : det $A^T$ = det A -> für Spalten gilt gleiches wie für Zeilen

**Entwicklung nach Zeile / Spalte:**

Berechnung nach *i*-ter Zeile ( x = j) oder *j*-ter Spalte (x = i)

$$\sum_{x=1}^{n} (-1)^{i+j} * a_{ij} * \det(A_{ij})$$

Entwicklung nach 1. Spalte:

$$|A| = a_{11} * \det(A_{11}) - a_{21} * \det(A_{21}) + \ldots + (-1)^{n+1} * a_{n1} * \det(A_{n1})$$

**Lemma 3.7 : Blockdreiecksmatrizen**

Sei A eine m x m Matrix, B eine m x n Matrix und C eine n x n Matrix, so gilt für die (m+n) x (m+n) Matrix

$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$: det M = (det A)(det C)

**Satz 3.9 : Berechnung über Gauss**

Für eine LR-Zerlegung von A gibt:

$$\det(A) = (\det P)(\det R) = (-1)^{Anzahl\ Zeilenvertauschungen} * \det R$$

wobei i) r = n: det R = $r_{11} * r_{22} * \ldots * r_{nn}$ (Dreiecksmatrix)

ii) r < n: det R = 0 (da Nullzeilen)

**Satz 3.11** : Für eine n x n Matrix A sind folgende Aussagen äquivalent:

i) Die Matrix A ist invertierbar / regulär.

ii) det A ≠ 0

iii) Im Gauss-Endschema ist r = n.

iv) Das lineare Gleichungssystem Ax = b ist für jedes b lösbar.

v) Die Lösung des linearen Gleichungssystems Ax = b ist eindeutig bestimmt.

vi) Das lineare Gleichungssystem Ax = 0 hat nur die triviale Lösung x = 0.

Korollar : A regulär ↔ det A ≠ 0 ↔ A invertierbar

**Korollar 3.12 :**

| | Ax = 0 | Ax = b |
|---|---|---|
| $\lvert A\rvert \neq 0$ | Nur die triviale Lösung | Genau eine Lösung |
| $\lvert A\rvert = 0$ | Unendlich viele Lösungen | Keine oder unendlich viele Lösungen |

# Vektorräume

*Reeller/Komplexer Vektorraum*: Menge von Objekten (Vektoren) mit folgenden Eigenschaften:

i) Addition ist definiert: $a, b \in V : a + b \in V$

ii) Multiplikation ist definiert: $a \in V, \alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{C} : \alpha * a \in V$

Rechenregeln: $a, b \in V,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$

i) *a + b = b + a*

ii) Es gibt einen **Nullvektor** (0), s.d. : *a + 0 = a*

iii) Zu jedem Vektor *a* existiert ein entgegengesetzter Vektor *–a*, s.d. : *a + (-a) = 0*

iv) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a,\ \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$

*C[a,b]* : Menge der im Intervall I=[a,b] definierten und stetigen Funktionen

$\mathbb{R}^n = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$ (n x 1) , wobei $x_1, \ldots, x_n$ *Koordinaten* des Vektors

*__Unterraum:__* nichtleere Teilmenge U eines Vektorraums V, falls erfüllt:

i) Für $a, b \in U$ ist auch $a + b \in U$ (0-Vektor auch Element von U)

ii) Für $a \in U, \alpha$ *eine Zahl* ist auch $\alpha a \in U$ (-a auch Element von U)

Bemerkung:

i) Es gibt immer die zwei trivialen Unterräume:

V selbst und $\{0\}$ , d.h. die Menge, die nur aus dem Nullvektor besteht.

ii) Für $U_1$, $U_2$ Unterräume von V sind folgende Kombinationen ebenfalls Unterräume:

$U_1 + U_2$, $U_1 \cap U_2$ (aber NICHT $U_1 \cup U_2$)

Definition: U heisst der von $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)}$ *aufgespannte oder erzeugte Unterraum*:

$$U = span\{ a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)} \}$$

- Die Vektoren $a^{(1)}, \ldots, a^{(k)}$ sind ein *Erzeugendensystem des Vektorraums V/ erzeugend*

Finden der erzeugenden Vektoren:

1. Matrix des Unterraums mittels Gauss lösen -> freie Parameter
2. Gleichungen $x_1 = \ldots, x_2 = \ldots$ in Vektoren schreiben: $\binom{-17}{5} * x_3 + \binom{3}{2} * x_4 \rightarrow a_1\ etc.$

Polynom: $P(x) = a_0 + a_1 * x + a_2 * x^2 + \ldots + a_n * x^n$ $a_n$ : Koeffizienten des Polynoms

**Beispiel:** Vektorraum $P^4 \in P \in [a, b]$

$$
\begin{aligned}
P^4 &:= \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 | a_o, \ldots, a_4 \in \mathbb{R}\} \\
&= \operatorname{span}\{1, x, x^2, x^3, x^4\} \\
&= \operatorname{span}\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x), P_4(x)\}
\end{aligned}
$$

Def: $P_i(x)$ sind die sogenannten **Legendre-Polynome**. Sie sind wie folgt definiert:

$$
P_0(x) = 1, \qquad P_i(x) = \frac{1}{2^i i!} \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x_i} (x^2 - 1)^i \quad \text{für } i > 0.
$$

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= 1, \\
P_1(x) &= x, \\
P_2(x) &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \\
P_3(x) &= \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, \\
P_4(x) &= \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}.
\end{aligned}
$$

*endlichdimensional*: falls V ein Erzeugendensystem besitzt; zB. $\mathbb{R}^n, \mathbb{P}_n$

unendlichdimensional: falls V kein Erzeugendensystem besitzt; zB. $C[a, b], \mathbb{P}$ (Menge aller P)

Definition: Falls gilt $x_1 * a^{(1)} + x_2 * a^{(2)} + \ldots + x_k * a^{(k)} = 0$ , ist V

*linear unabhängig* , falls $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$ folgt.

*linear abhängig* , falls es Koeffizienten ≠ 0 gibt.

*Basis:* falls das Erzeugendensystems eines VR linear unabhängig ist, heisst es *Basis.*

**Satz 4.1**: **Basis ist minimales Erzeugendensystem**

i) Verschiedene Basen desselben Vektorraums bestehen aus gleich vielen Vektoren.
ii) Eine Basis hat weniger oder gleich viele Vektoren wie ein Erzeugendensystem.
iii) Menge d. linear unabh. Vektoren ≤ Menge d. erzeugenden Vektoren

*Dimension von V:* entspricht der Anzahl Basisvektoren, == Rang des GS (Gauss)

Bemerkung: Nullvektor immer lin. abh. -> dim{0} = 0 ; dim{unendlichdim. VR} = ∞

**Satz 4.3**: Für einen Vektorraum V mit Dimension n gilt:

i) Mehr als n Vektoren in V sind linear abhängig.
ii) Weniger als n Vektoren in V sind nicht erzeugend.
iii) n Vektoren in V sind linear unabhängig genau dann, wenn sie erzeugend sind, und genau dann bilden sie eine Basis.

Anmerkung: Jeder reeler n-dimensionaler Vektorraum V ist eine exakte Kopie des $\mathbb{R}^n$, also *isomorph zu* $\mathbb{R}^n$ ( dieser perfektes Spiegelbild des Rests).

Berechnungen mit Gauss : $A := ( a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)} \in \mathbb{R}^n )$

Erzeugend: Falls Ax = b für jedes b eine Lösung ↔ r = n

Linear unabhängig: Falls Ax = 0 nur die triviale Lösung besitzt ↔ r = k

Der Rang einer Matrix A entspricht der maximalen Anzahl linear unabhäng. Spaltenvektoren.

-> Pivotspalten $r^{(i_1)}, \ldots, r^{(i_k)} \rightarrow a^{(i_1)}, \ldots, a^{(i_1)}$ Spaltenvektoren sind lin. unabhängig.

## *Normierte Vektorräume*

*Norm (oder Länge)* : Ordnet jedem Vektor $a \in V$ eine reelle Zahl $\|a\|$ , falls gilt:

i) $\forall\, a \in V: \ \|a\| \geq 0; \ \ \|a\| = 0 \rightarrow a = 0$
ii) $\forall\, a \in V, \alpha \in \mathbb{R}: \ \|\alpha\, a\| = |\alpha| * \|a\|$
iii) Dreiecksungleichung: $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$

$L_P$- Norm:

$$\|x\|_p := \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_n|^p}$$

$L_1$: $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$

$L_2$ : euklidische Norm $\|x\|_2 = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots + {x_n}^2}$

$L_\infty$ : Maximumnorm $\|x\|_\infty = \max( |x_1|, \ldots, |x_n| )$

**Satz 4.4 (Äquivalenz) :** Für zwei Normen $\|x\|$ und $\|x\|'$ gibt es eine Zahl $c \geq 1$, s.d. :

$$\frac{1}{c}\|x\|' \leq \|x\| \leq c\,\|x\|'$$

Normen in C[a,b] : I = [a,b]

Norm ≈ Abstand zum Nullvektor -> $\|f\|_0 := \max_{x \in I} |f(x)|$

f'(x) Ableitung $\|f\|_1 := \max_{x \in I} |f(x)| + \max_{x \in I} |f'(x)|$

## *Skalarprodukt (a,b)*

$\|a\| = \sqrt{(a,a)}$ ist die „vom Skalarprodukt induzierte Norm" : $\|*\|$

*Skalarprodukt*: Eine Funktion, die jedem Paar x,y eine Zahl (x,y) zuordnet, falls:

i) $(x, y^1 + y^2) = (x, y^1) + (x, y^2)$ ; $(x, \alpha y) = \alpha(x,y)$ (linear im 2. Faktor)

ii) $(x,y) = (y,x)$ (symmetrisch)

iii) $(x,x) \geq 0$ ; $(x,x) = 0 \rightarrow x = 0$ (positiv definiert)

***Standartskalarprodukt:***

$\mathbb{R}^n \rightarrow (x,y) = x^T y = |x||y| \cos\varphi$

$\mathbb{C}^n \rightarrow (x,y) = \bar{x}^T y$

$C[a,b] \rightarrow (x,y) = \int_b^a f(t)g(t)\,dt$

*orthogonal* : Zwei Vektoren sind orthogonal /stehen senkrecht aufeinander, falls (x,y) = 0.

**Satz 4.5 :** Sei V ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt

i) Die orthogonale Projektion eines Vektors x auf den Vektor y ≠ 0 ist: $\frac{(y,x)}{(y,y)}\,y$

ii) Schwarz'sche Ungleichung: $(x,y)^2 \leq (x,x)(y,y)$

iii) Pythagoras: $\|x+y\|^2 = \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

$$\cos\varphi = \frac{(a,b)}{\|a\|\|b\|} = \frac{(a,b)}{\sqrt{(x,x)(y,y)}}$$

*Einheitsvektor* : Vektor x der Länge $\|x\| = 1$

**Satz 4.6 , 4.7 : Orthonormale Basis**

i) k paarweise orthogonale Einheitsvektoren sind linear unabhängig.

ii) In einem reellen n-dimensionalen Vektorraum bilden n paarweise orthogonale Einheitsvektoren eine orthonormale Basis.

## *Schmidt'sches Orthogonalisierungsverfahren*

1. $e^{(1)} := \frac{1}{\|b^{(1)}\|} b^{(1)}$
2. $e^{(2)} := \frac{1}{\|c^{(2)}\|} c^{(2)}, \quad c^{(2)} := b^{(2)} - (b^{(2)}, e^{(1)})e^{(1)}$
3. $e^{(3)} := \frac{1}{\|c^{(3)}\|} c^{(3)}, \quad c^{(3)} := b^{(3)} - (b^{(3)}, e^{(1)})e^{(1)} - (b^{(3)}, e^{(2)})e^{(2)}$
4. analog

Oder mit **QR-Zerlegung:** Die Spalten der Matrix A sind eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Dann sind die Spalten von Q die orthonormale Basis.

# Ausgleichsrechnung – Methode der kleinsten Quadrate

Messungenauigkeiten -> exakte Lösung approximieren mit minimalen Abweichungen

Überbestimmtes Gleichungssystem:

$$\vec{A}x = \vec{c}\ , \qquad m > n\,, \quad A := (a^{(1)} \dots\ a^{(n)}\ )$$

Methode der kleinsten Quadrate: Fehlergleichung

$$\vec{A}\ x - \vec{c}\ = \vec{r}$$

- Der Residuenvektor $\vec{r}$ ist die Differenz des Vektors $\vec{a}$ und des Konstantenvektors $\vec{c}$. Dabei ist $\vec{a}$ die Linearkombination der n Vektoren $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$ mit $x^1, \dots, x^2$.
- Möglichst kleiner Fehler, wenn $\vec{r}$ senkrecht auf allen Spaltenvektoren von A, also alle Skalarprodukte ( $a^{(j)}$ , r) , j = 1, … , n gleich null sind.

<u>Normalengleichungen :</u> $\quad (A^T A)\,x = A^T c \quad$ -> Gauss

Dabei ist $A^T A$ eine symmetrische *n x n* Matrix, $A^T c$ ein n-Vektor.

**Berechnung** $\quad A^T A : \begin{pmatrix} (a^1, a^1) & \cdots & (a^1, a^n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a^n, a^1) & \cdots & (a^n, a^n) \end{pmatrix} \quad$ symmetrisch, (a,b) = (b,a)

$A^T c : \begin{pmatrix} (a^1, c) \\ \cdots \\ (a^n, c) \end{pmatrix}$

> **Satz 5.1:** i) Ist x* Lösung der Normalengleichungen, so minimiert x* die Fehlergleichungen im Sinne der kleinsten Quadrate.
>
> ii) Sind die Spalten der Koeffizientenmatrix A der Fehlergleichungen linear unabhängig, so besitzen die Normalengleichungen eine eindeutig bestimmte Lösung.

## *QR- Zerlegung*

Sei Q eine orthogonale m x m Matrix.

$$Q^T Ax - Q^T c = Q^T r =: s$$
$$R\,x \; - \; d \; = \; s$$

> **Satz 5.2 :** i) Zu jeder m x n Matrix A, mit m ≥ n, existiert eine orthogonale m x m Matrix Q, so dass gilt:
>
> $$A = QR \quad \text{mit} \quad R = \begin{pmatrix} R_0 \\ -- \\ 0 \end{pmatrix}$$
>
> wobei $R_0$ eine n x n –Rechtsdreieckmatrix ist und 0 die (m-n) x n –Nullmatrix.
>
> ii) Sind die Spaltenvektoren $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$ der Matrix A linear unabhängig, so ist die Matrix $R_0$ regulär.

Q ist das Produkt von ( $m * n - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$ ) Givens-Rotationen.

<u>Algorithmus :</u>

1) $R := Q^T A$ (QR-Zerlegung von A mit Givens-Rotationen)
2) $d := Q^T c$ (Transformation von c)
3) $R_0\, x = d_0$ (Rückwärtseinsetzen)

**Matlab-Code:**

*<u>Normalengleichung :</u>* *Ax = c ->* `x = A \ c ;`

*<u>QR :</u>*

1) `[Q,R] = qr(A) ;`
2) `d = Q' * c ;` *% Q' = Q^T*
3) `x = R ( 1 : n, : ) \ d( 1 : n, : ) ;` *% n Grösse*

Oder: 2) + 3) $x = R \setminus (\,Q' * c\,)$

# Lineare Abbildungen

**Def:** Eine Abbildung $F: x \in V \rightarrow y = F(x) \in W$ heisst lineare Abbildung vom endlichdimensionalen Vektorraum V in den endlichdimensionalen Vektorraum W, falls:

i) $F(x+y) = F(x) + F(y)$

ii) $F(\alpha x) = \alpha * F(x)$

*Anmerkung:* Die lineare Abbildung F(x) lässt sich als Matrix A darstellen. ( F(x) = A*x )

**Satz 6.4: Verkettung linearer Abbildungen**

i) Die Zusammensetzung von linearen Abbildungen einst linear.

ii) $F : x \in V^n \rightarrow y = Ax \in V^m, G : y \in V^m \rightarrow \quad z = By \in V^p$

$$H := G \circ \mathrm{H}, \mathrm{H} : \mathrm{x} \in V^n \rightarrow \quad \mathrm{Z} = \mathrm{BAx} \in V^p$$

## *Lineare Selbstabbildung*

*umkehrbar / invertierbar:* Eine Abbildung $F : x \in V^n \rightarrow x' \in V^n$ heisst umkehrbar, falls es zu jedem x' ein eindeutig bestimmtes x gibt, sodass F(x) = x'.
Es existiert eine *Umkehrabbildung* $F^{-1}$.

**Satz 6.7:** i) Eine lineare Abbildung $F : x \in V^n \rightarrow x' = Ax \in V^n$ ist genau dann umkehrbar, wenn A regulär ist.

ii) Ist F umkehrbar, so ist $F^{-1}$ linear und wird durch die Matrix A-1 beschrieben:

$$F^{-1}: x' \rightarrow x = A^{-1} x'$$

iii) Ist F umkehrbar, so gilt: $F^{-1} \circ F = F \circ F^{-1} = I$, wobei I : Identität

**Interpretation von Abbildungen**

$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ *Givens-Matrix:* Drehung in $\mathbb{R}^2$ in xy-Ebene (um Nullpunkt) im Uhrzeigersinn um den Winkel $\varphi$.

$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *Givens-Matrix:* Drehung in $\mathbb{R}^3$ in xy-Ebene (um z-Achse) im Uhrzeigersinn um den Winkel $\varphi$.

$\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$ *Givens-Matrix:* Drehung in $\mathbb{R}^3$ in xy-Ebene (um y-Achse) im Gegenuhrzeigersinn um den Winkel $\varphi$.

$\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$ *Keine Givens-Matrix:* Drehung in $\mathbb{R}^3$ in xy-Ebene (um y-Achse) und Spiegelung an der xz-Ebene..

$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *Householdermatrix:* Spieglung an der zweiten Winkelhalbierenden

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Spiegelung an der xy-Ebene

## *Koordinatentransformation*

ist eine umkehrbare lin. Abbildung T mit Basiswechsel : $T : y \in W^n \rightarrow x = Ty \in V^n$

In den Spalten von T stehen die n neuen Basisvektoren, ausgedrückt in alten Koordinaten.

**Satz 6.8:** Seien eine lineare Abbildung $F : x \in V^n \rightarrow x' = Ax \in V^n$ und eine Koordinatentransformation $T : y \in W^n \rightarrow y' = Ty \in V^n$ gegeben.

**Dann lässt sich die lineare Abbildung in den neuen Koordinaten darstellen als:**

$$G = T^{-1} \circ F \circ T : y \in W^n \rightarrow y' = T^{-1}ATy \in W^n$$

Trick: Anstelle $T^{-1}$ ausrechnen, rechne ( $B = T^{-1}AT$ ) :
TB = AT, und löse mittels Gauss nach B (3 1-Spalten für B)

*ähnlich :* Die n x n Matrix B heisst *ähnlich* zur n x n Matrix A, falls es eine reguläre n x n Matrix T gibt, s.d. :

$$B = T^{-1} A\, T$$

(Selbe Abbildung bezüglich anderen Koordinaten)

## *Kern und Bild*

**Def:** Sei $F : x \in V^n \to y = Ax \in V^m$ eine lin. Abbildung ($V = \mathbb{R} / \mathbb{C}$

i) *Kern* der Matrix A: Menge aller Vektoren, die auf null abgebildet werden :

$$Kern\ A := \{ x \in V^n \mid Ax = 0 \}$$

ii) *Bild* der Matrix A: Menge aller Bildvektoren :

$$Bild\ A := \{ y \in V^m \mid Es\ gibt\ ein\ x \in V^n, s.d.\ y = Ax \}$$

**Satz 6.1 :** Sei $A = ( a^{(1)} \dots a^{(n)} )$ eine m x n Matrix. Dann gilt:

i) b liegt genau dann im Bild von A, wenn das GS Ax = b lösbar ist.

$$Bild\ A = span\ \{ a^{(1)} \dots a^{(n)} \}$$

ii) Der Kern von A ist die Lösungsmenge des homogenen GS Ax = 0.

iii) Kern A ist ein Unterraum von $V^n$ $\to$ $\dim(Kern\ A) = n - r$

Bild A ist ein Unterraum von $V^m$ $\to$ $\dim(Bild\ A) = r$

iv) Es gilt: $\dim(Kern\ A) + \dim(Bild\ A) = n = \dim V^n$

v) Es gilt: $\dim(Bild\ A) = \dim(Bild\ A^T)$.

**Satz 6.5:** i) Die Unterräume Bild A und Kern $A^T$ von $\mathbb{R}^m$ spannen $\mathbb{R}^m$ auf:

$$Bild\ A + Kern\ A^T = \mathbb{R}^m$$

ii) Die Unterräume Bild A und Kern $A^T$ stehen senkrecht aufeinander.

iii) $\dim(Bild\ A) + \dim(Kern\ A^T) = \dim \mathbb{R}^m = m$

<u>**Fredholmsche Alternative:**</u> Gleichunssystem Ax = b ist genau dann lösbar, wenn b senkrecht auf allen Lösungen des sogenannten *adjungierten* Gleichungssystems $A^T = 0$ steht ( = Kern($A^T$) ).

## *Orthogonale Abbildungen*

**Def:** Die Abbildung $F : x \in \mathbb{R}^n \to x' = Ax \in \mathbb{R}^n$ heisst

i) **orthogonal**, falls $(x', y') = (Ax, y) = (x, y)$

ii) **längentreu**, falls $\|x'\|_2 = \|Ax\|_2 = \|x\|_2$

**Satz 6.10 :** Für $F : x \in \mathbb{R}^n \to x' = Ax \in \mathbb{R}^n$ ist äquivalent:

i) F ist orthogonal

ii) F ist längentreu

iii) F ist winkeltreu

iv) Die Spalten von A bilden eine orthonormale Basis in $\mathbb{R}^n$

v) Die Matrix A ist orthogonal, d.h. es gibt $A^T A = I$, bzw. $A^T = A^{-1}$

➔ Orthogonale Abbildungen sind volumenerhaltend

**Satz 6.11, 6.12, 6.13: Volumen**

Seien $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$ linear unabhängige Vektoren. Dann ist das Volumen des aufgespannten Parallelepipeds:

$$Vol_n^n ( a^{(1)}, \dots, a^{(n)} ) = \left| \det( a^{(1)}, \dots, a^{(n)} ) \right|$$

*Anmerkung:* beliebige Vektoren zuerst mittels Gauss linear unabhängig machen.

*Norm einer Matrix*

Gibt an, um welchen Faktor sich x maximal verändert, wenn x' = A x angewendet wird.

**Def**: Sei A eine n x n Matrix, und sein in $V^n$ eine Norm $\|x\|_*$ , $x \in V^n$ gegeben.

$$\|A\|_* = \max_{x \in V^n, x \neq 0} \left\{ \frac{\|Ax\|_*}{\|x\|_*} \right\} = \max_{\|x\|_* = 1} \{ \|Ax\|_* \}$$

sei *die von der Vektornorm* $\|x\|_*$ *induzierte Matrixnorm (eigentlich sup).*

**Satz 6.9:**
- i) $\|A\|_* \geq 0, \quad aus\ \|A\|_* = 0\ folgt\ A = 0$
- ii) $\|\propto A\|_* = |\propto|\ \|A\|_*$
- iii) $\|A + B\|_* \leq \|A\|_* + \|B\|_*$
- iv) $\|Ax\|_* \leq \|A\|_*\ \|x\|_*$
- v) $\|AB\|_* \leq \|A\|_*\ \|B\|_*$

**Spaltensummenform:** grösste Summe der Beträge einer Spalte : $\|\boldsymbol{A}\|_{\boldsymbol{1}} = \mathbf{max}_{\boldsymbol{j}} \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} |\boldsymbol{a_{ij}}|$

**Zeilensummenform:** grösste Summe der Beträge einer Zeile: $\|\boldsymbol{A}\|_{\infty} = \mathbf{max}_{\boldsymbol{i}} \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{n}} |\boldsymbol{a_{ij}}|$

**Spektralnorm:** bezeichnet die 2-Norm $\|A\|_2$ einer reellen Matrix A
- i) Für jede quadratische Matrix A gilt:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\mu_{Max}} = \sqrt{maximaler\ Eigenwert\ von\ A^T A}$$

- ii) Für jede orthogonale Matrix Q gilt: $\|Q\|_2 = 1$
- iii) Ist A eine symmetrische Matrix, so gilt: $\|A\|_2 = max_i\ |\lambda_i|$

**Matrixnorm der Inversen**
- i) Für jede invertiertbare Matrix A gilt:

$$\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_{Min}}} = \frac{1}{\sqrt{minimaler\ Eigenwert\ von\ A^T A}}$$

- ii) Ist A symmetrisch, so ist $\|A^{-1}\|_2 = max_i \frac{1}{|\lambda_i|} = \frac{1}{min_i\ |\lambda_i|}$

# Eigenwertproblem

**Def:** Sei A einen n x n Matrix, Abbildung $F : x \in \mathbb{C}^n \rightarrow Ax \in \mathbb{C}^n$
- i) Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heisst *Eigenwert der Matrix A*, falls es einen Vektor $x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0$ gibt, so dass $Ax = \lambda x$ .
- ii) Falls λ existiert, heisst jeder dazugehörige Vektor $x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0$ *Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ* .

**Satz 7.1:** Die Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ ist genau dann ein Eigenwert der Matrix A, wenn

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$ heisst *chrakteristisches Polynom der Matrix A*

-> Nullstellen von $P_A(\lambda)$ sind Eigenwerte, $P_A(\lambda)$ Polynom n-ten Grades

**Algebraische Vielfachheit k von $\boldsymbol{\lambda^*}$:** $\lambda^*$ ist k-facher Eigenwert von A ( k-fache NS von $P_A(\lambda)$ )

**Spektrum von A :** Gesamtheit aller Eigenwerte

Es gelten folgende Aussagen:
- i) Jede n x n Matrix hat *mindestens einen und höchstens n Eigenwerte*.
  (falls mit algebraischer Vielfachheit gezählt, hat sie stets n Eigenwerte).
- ii) Für jeden Eigenwert ist die algebraische Vielfachkeit $1 \leq k \leq n$ .
- iii) Für jede reelle Matrix sind die Koeffizienten des charakt. Polynoms reell. Die Eigenwerte sind entweder reell oder treten in konj. kompl. Paaren auf.
- iv) $\lambda^n$ ist ein Eigenwert von $A^n$ , und $\frac{1}{\lambda}$ ist ein Eigenwert von $A^{-1}$

<u>Komplexe EW:</u> Für einen komplexen EW $\lambda = \alpha + i\beta$ und dazugehörigem EV $u = x + iy$

Ist auch $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ EW von A mit EV $u = x - iy$ (x,y lin. unabh.)

➔ Komplexe Eigenwerte treten immer in konjugiert komplexen Paaren auf.

<u>Komplexe EV:</u> für einen EW EV finden und aufspalten: $v^{(k)} + i\ w^{(k)}$

Reelle Lsg. DGL: $2 * e^{\alpha t}([\,a * \cos(\beta t) - b * \sin(\beta t)] * v^{(k)} - [\,a * \sin(\beta t) + b * \cos(\beta t)] * w^{(k)})$

**Satz 7.2 : Ähnliche Matrizen**

i) Ähnliche Matrizen haben das gleiche charakt. Polynom und somit dieselben Eigenwerte mit den gleichen algebraischen Vielfachheiten.

ii) Ist $B = T^{-1}AT$ und x ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, so ist $y = T^{-1}x$ ein Eigenvektor von B zum selben Eigenwert λ.

## *Eigenvektoren*

x ist genau dann ein Eigenvektor, falls es das homogene Gleichungssystem löst:

$$(A - \lambda I_n)x = 0$$

Die Menge der Eigenvektoren ist gleich der Menge nichttrivialer Lösungen des homog. GS.

**Def:** Für den Eigenwert λ heisst die Menge aller Lösungen des homogenen Gleichungsyst. *Eigenraum von A zum Eigenwert λ*.

Die Dimension dieses Unterraums heisst *geometrische Vielfachheit* des Eigenwerts λ.

**Geometrische Vielfachheit**: wieviele Eigenvektoren existieren zum gegebenen Eigenwert.

Bemerkung: Für algebraische Vielfachheit 1 *muss* die geometrische VFH ebenfalls 1 sein.

**Satz 7.3, 7.4**

i) $1 \leq \text{geometrische Vielfachheit v.}\,\lambda \leq \text{algebraische Vielfachheit v. } \lambda$

ii) Für $\lambda_1 \dots \lambda_n$ paarweise verschiedene EW sind die dazugehörigen Eigenvektoren $u^{(1)} \dots u^{(n)}$ linear unabhängig.

*Eigenbasis :* Eine Basis von Eigenvektoren einer Matrix A

Sie existiert, falls die Summe der geometrischen Vielfachheiten einer n x n Matrix gleich *n* ist.
Dies ist so, wenn für jeden Eigenwert die geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen Vielfachheit ist (-> halbeinfache Matrix)

➔ Summe der lin. unabhängige EV = Summe der geometrischen Vielfachheiten

Eine quadratische Matrix heisst

**einfach:** für jeden EW ist die algebr. VFH = 1 ( u. gem. VFH = 1)

**halbeinfach:** für jeden EW ist die algebr. VFH = geom. VFH

**diagonalisiertbar**, falls es eine reguläre Matrix T gibt, so dass die ähnliche Matrix $D = T^{-1}\,A\,T$ eine Diagonalmatrix ist.

**Satz 7.6 :** Für jede quadratische Matrix ist äquivalent:

i) Die Matrix A ist *halbeinfach*.

ii) Die Matrix A *besitzt eine Eigenbasis*.

iii) Die Matrix A ist *diagonalisierbar*.

Folgerungen:

i) Bilden $u^{(1)}, \dots, u^{(n)}$ eine Eigenbasis zu A, dann diagonalisiert $T = (u^{(1)}, \dots, u^{(n)})$ die Matrix: $D = T^{-1}\,A\,T$ ist diagonal.
In der Diagonalen von D stehen die Eigenwerte von A.

ii) Umgekehrt: Falls es eine reguläre Matrix T und eine Diagonalmatrix D gibt, s.d. $D = T^{-1}\,A\,T$, dann bilden die Spalten von T eine Eigenbasis zu A.
In der Diagonalen von D stehen die Eigenwerte von A.

**Satz 7.7, 7.8 : reelle, symmetrische Matrizen**

i) Alle Eigenwerte von A sind reell.

ii) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander.

iii) Die Matrix A ist halbeinfach (und somit diagonalisierbar).

iv) Es gibt eine orthonormale Eigenbasis zu A.

v) Es gibt eine orthogonale Matrix T, sodass die Matrix $D = T^{-1}\,A\,T$ diagonal ist. In der Diagonalen stehen die Eigenwerte von A. Die Spalten von T sind die entsprechenden Eigenvektoren der Matrix A.

# Anwendungen d. Eigenwertproblems

## *Berechnung von $y = A^k x$*

1. Eigenwertproblem von A lösen -> Eigenvektoren $u^{(1)}, \dots, u^{(n)}$

   $T = \left( u^{(1)}, \dots, u^{(n)} \right)$

   $D = T^{-1} A T = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ($T^{-1}$ nicht berechnen !)
2. $A^k = T D^k T^{-1}$
3. Lineares GS $Tz = x$ nach z auflösen.
4. $D^k$ berechnen (einzelne Stellen hoch k) , danach $\omega := D^k z$
5. Berechne $y = T \omega$

Bemerkung: Falls T orthogonal ( $T^{-1} = T^T$ ), kann $A^k$ direkt berechnet werden!

## *Matrixexponentialfunktion*

Für n x n Matrix A : $e^A := I_n + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots$

Für Diagonalmatrix D : $e^D = diag(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$

Für halbeinfache Matrix A : $e^A = T e^D T^{-1}$

Anmerkung : $e^A e^B = e^{A+B} \Leftrightarrow AB = BA$

Lösen von Differenzialgleichungen mittels Matrixexponentialfunktion:

$$\dot{y}(t) = A\, y(t) \quad , \quad y(t) = e^{tA} y^0$$

Berechnung: $y(t) = e^{tA} y^0 = T e^{tD} T^{-1} y^0$

Löse $z^0 = T^{-1} y^0 \rightarrow T z^0 = y^0$ einsetzen und auflösen

# Normalformen

Möglichst einfache Form, sodass Abbildung gut ersichtlich

## *Normalform einer quadratischen Matrix*

**Satz 9.1: Ähnlichkeit**

i) Jede halbeinfache Matrix A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix D.

   ($D = T^{-1} A T$ : in D stehen die Eigenwerte von A; die Transformationsmatrix T enthält in den Spalten eine Eigenbasis zu A)

ii) Jede reelle symmetrische Matrix A ist orthogonal-ähnlich zu einer Diagonalmatrix D (als Basisvektoren kann ein Orthonormalsystem gewählt werden).

iii) Jede quadratische Matrix A ist ähnlich zu einer Rechtsdreiecksmatrix R.

   (In den Diagonalen von R stehen die Eigenwerte von A ).

**Satz 9.2**

i) Jede reelle *halbeinfache* n x n-Matrix A ist ähnlich zu einer reellen **Blockdiagonalmatrix**

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} \tilde{D}_{11} & & & 0 \\ & \tilde{D}_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \tilde{D}_{kk} \end{pmatrix}$$

mit Matrizen $\widetilde{D}_{jj}$ der Ordnung 1 (reeller Eigenwert) oder Ordnung 2 (komplexer Eigenwerte $a_j + i\, b_j$) in der Form

$$\tilde{D}_{kk} = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}$$

Die reelle Transformationsmatrix $\tilde{T}$ $\left( \widetilde{D} = \tilde{T}^{-1} A \tilde{T} \right)$ erhält man, indem man in T jedes konjugiert komplexe Eigenvektorpaar durch ihre Real- und Imaginärteile ersetzt ( $v^{(k)} + i\, w^{(k)}$ ).

ii) Jede reelle n x n-Matrix A ist ähnlich zu einer reellen oberen **Blocksdreiecksmatrix**

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} \tilde{R}_{11} & & & * \\ & \tilde{R}_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \tilde{R}_{kk} \end{pmatrix}$$

mit Matrizen $\tilde{R}_{jj}$ der Ordnung 1 (reeller Eigenwert) oder Ordnung 2 (komplexer Eigenwerte $a_j \pm i\, b_j$) in der Form

$$\tilde{R}_{kk} = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}$$

**Satz 9.3: Satz von Schur**

Zu jeder reellen n x n-Matrix A existiert eine orthogonale Matrix U, so dass $\tilde{\tilde{R}} := U^T A\, U$ eine reelle obere Blockdreiecksmatrix ist:

$$\tilde{\tilde{R}} = \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{R}}_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{\tilde{R}}_{kk} \end{pmatrix}$$

Die Matrizen $\tilde{\tilde{R}}_{jj}$ der Ordnung 1 sind reelle Eigenwerte von A.
Die 2. Ordnung haben als Eigenwerte ein konjugiert komplexes Eigenwertpaar von A.

<u>Bemerkung:</u> Hat A nur reelle Eigenwerte, so ist A orthogonal-ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix.

<u>Definition:</u> Eine quadratische Matrix H heisst *obere Hessenbergmatrix*, falls $h_{ij} = 0$ ist für alle $i > j + 1$ :

$$H = \begin{pmatrix} * & & & * \\ * & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & * & * \end{pmatrix}$$

**Satz 9.5:** Zu jeder reellen n x n-Matrix A existiert eine orthogonale Matrix U, so dass $H := U^T A\, U$ eine obere Hessenbergmatrix ist. U kann als Produkt von $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Givensrotationen dargestellt werden.

## *<u>Singulärwertzerlegung : Normalform einer allgemeinen m x n- Matrix</u>*

**Satz 9.6 : Singulärwertzerlegung** *mit $s_i$ als Singulärwerte*

| | | |
|---|---|---|
| A : | m x n | Rang r , reel |
| U : | m x m | orthogonal |
| V : | n x n | orthogonal |
| S : | m x n | |

$$A = U\, S\, V^T$$

Die Matrix S hat Diagonalgestalt:

$$S = \begin{cases} \begin{pmatrix} \tilde{S} \\ -- \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{falls } m \geq n \\ (\tilde{S}|0), & \text{falls } m \leq n \end{cases}$$

mit $\hat{S} = diag\,(\, s_1, s_2, \ldots\ , s_r, s_{r+1}, \ \ldots\ , s_p\,)\,,\ p := \min(m, n)$

i) $s_1 = \|A\|_2\,, s_1 \geq s_2 \geq s_r \geq 0\ ,\ s_{r+1} = \cdots = s_p = 0$

ii) Die Zahlen ${s_i}^2$ sind die Eigenwerte von $\begin{cases} A^T A & m \geq n \\ A\, A^T & m \leq n \end{cases}$

iii) Für die Spalten $u^{(i)}\,, i = 1, \ldots, m$ von U und die Spalten $v^{(i)}\,, i = 1\,, \ldots, n$ von V gilt:

$$Av^{(i)} = s_i\, u^{(i)}, \qquad A^T u^{(i)} = s_i\, v^{(i)} \qquad i = 1, \ldots, p$$

$$m < n\ :\ Av^{(i)} = 0\ , i = p+1, \ldots, n$$
$$m > n\ :\ A^T u^{(i)} = 0\ , i = p+1, \ldots, m$$

**Satz 9.7:** Für jede n x n-Matrix A von Rang r gilt:

i) $Kern\ A = span\ \{ v^{(r+1)}, \ \ldots, v^{(n)} \}$
$Bild\ A = span\ \{ u^{(1)}\ , \ldots\ ,\ u^{(r)} \}$

ii) $Kern\ A^T = span\ \{ u^{(r+1)}, \ \ldots, u^{(m)} \}$
$Bild\ A^T = span\ \{ v^{(1)}\ , \ldots\ ,\ v^{(r)} \}$

# Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Sei ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung mit den Anfangsbedingungen y(0) gegeben:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t) &= a_{11}y_1(t)+\cdots+a_{1n}y_n(t),\\ \dot{y}_2(t) &= a_{21}y_1(t)+\cdots+a_{2n}y_n(t),\\ &\vdots\\ \dot{y}_n(t) &= a_{n1}y_1(t)+\cdots+a_{nn}y_n(t),\end{aligned}$$

Und seien die Koeffizienten $a_{ij}$ so gewählt, dass sie eine diagonalisierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\,x\,n}$ bilden:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

1. Das LGS zu einer Matrixgleichung $y'(x) = A * y(t)$ umformen mit:

$$\dot{y}(t) := \begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) \end{bmatrix}, \qquad y(t) := \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}.$$

2. Eigenwertproblem von A lösen und zugehörige Eigenvektoren $u^{(1)}, \dots, u^{(n)}$ bestimmen

3. $T = (u^{(1)}, \dots, u^{(n)})$ bestimmen

4. Mit $y(t) = T\,x(t)$ wird die Abbildung in neue Koordinaten transformiert. Wegen

$$\dot{y}(t) = Ay(t), \qquad T\dot{x}(t) = ATx(t)$$

kann *x(t)* einfach bestimmt werden, da $T^{-1}\,A\,T$ die Diagonalmatrix $D = diag(\lambda_1, .., \lambda_n)$ ist

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= T^{-1}ATx(t) = Dx(t),\\ \dot{x}_i(t) &= \lambda_i x_i(t) \quad \text{mit} \quad i = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Wichtig: $\boldsymbol{T^{-1}\,A\,T}$ **nicht berechnen!** Die allgemeinen Lösungen sind

$$x_i(t) = c_i \mathrm{e}^{\lambda_i t}.$$

5. *x(t)* zu *y(t)* zurück transformieren mit

$$y(t) = Tx(t) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} u^{(1)} + \cdots + c_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} u^{(n)}.$$

6. Die Parameter $c = (c_1, \dots, c_n)^T$ mit $Tc = y(0)$ bestimmen.

## Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

Die Berechnung erfolgt analog zu DGL 1. Ordnung.
Die allgemeinen Lösungen sind mit $\omega_i{}^2 = -\lambda_i$

$$x_i(t) = a_i \cos(\omega_i t) + b_i \sin(\omega_i t).$$

# 8 MATLAB

| | |
|---|---|
| `rank(A)` | Rang der Matrix $A$ |
| `det(A)` | Determinante der Matrix $A$ |
| `[L,R,P] = lu(A)` | LR-Zerlegung der Matrix $A$ |
| `[Q,R] = qr(A)` | QR-Zerlegung der Matrix $A$ |
| `x=A\b` | löst die Gleichung $Ax = b$ nach $x$ auf |
| `norm(A)` | Euklidische Norm der Matrix $A$ |
| `expm(A)` | berechnet die Matrix $\mathrm{e}^A$ |
| `[T,D] = eig(A)` | Eigenwertzerlegung der Matrix $A$ |
| `[U,S,V] = svd(A)` | Singulärwertzerlegung der Matrix $A$ |

Matrix definieren

$$A = [\,0, 2\,; 3, -4\,; 0.5\,, sqrt(2)\,] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -4 \\ 0.5 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= [\,a^{(1)}, \dots, a^{(n)}\,]\,;\ A(3{,}1) = 0.5$$

$$a^{(1)} = A[\,:\,, 1\,]$$

Inverse: inv(A)

Transponierte: transpose(A)

| Grad | Rad | $\sin\varphi$ | $\cos\varphi$ | $\tan\varphi$ |
|---|---|---|---|---|
| $0°$ | $0$ | $0$ | $1$ | $0$ |
| $30°$ | $\frac{1}{6}\pi$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| $45°$ | $\frac{1}{4}\pi$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $1$ |
| $60°$ | $\frac{1}{3}\pi$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ |
| $90°$ | $\frac{1}{2}\pi$ | $1$ | $0$ | |
| $120°$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\sqrt{3}$ |
| $135°$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-1$ |
| $150°$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| $180°$ | $\pi$ | $0$ | $-1$ | $0$ |