KompA Zusammenfassung

Andreas Biri, D-ITET 31.07.13

1. Komplexe Zahlen

$$\boxed{z = x + i\,y = r * e^{i\,\varphi} = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi\,),\ z \in \mathbb{C}}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|\ ,\ \varphi = \arg(x, y)$$

$\bar{z} = x - i\,y$: *konjugiert komplexe Zahl*

$$x = \mathrm{Re}\{z\} = \frac{z+\bar{z}}{2} \quad , \quad y = \mathrm{Im}\{z\} = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

$$|z| = \sqrt{z * \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad |z\,w| = |z| * |w|$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad ; \quad \overline{z_1 * z_2} = \overline{z_1} * \overline{z_2}$$

$$e^{i\,x} = \cos x + i \sin x \quad ; \quad \overline{e^{i\,x}} = e^{-i\,x}$$

$$e^{x+i\,y} = e^x(\cos y + i \sin y) \quad ; \quad |e^z| = e^x$$

$$\cos(z) = Re\{e^{i\,\varphi}\} = \frac{e^{i\,z} + e^{-i\,z}}{2}$$

$$\sin(z) = Im\{e^{i\,\varphi}\} = \frac{e^{i\,z} - e^{-i\,z}}{2i}$$

$$\cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \frac{e^{2z} + 1}{2e^{z}}$$

$$\sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = \frac{e^{2z} - 1}{2e^{z}}$$

$$\cos(z) = \cosh(iz) \quad ; \quad \cosh(z) = \cos(iz)$$

$$\sin(z) = i * \sinh(-iz) \quad ; \quad \sinh(z) = -i * \sin(iz)$$

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$$

$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$$

Wurzel einer komplexen Zahl

$$z^n = (r * e^{i\,\varphi})^n = r^n * e^{i\,(n*\varphi)}$$

$$\rightarrow \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} * e^{i\,(\frac{\varphi}{n} + k*\frac{360°}{n})}$$

reguläres n-Eck auf dem Kreis mit Radius $\sqrt[n]{r}$

Hauptwert: eindeutige Umkehrfunktion

$$p.v.\ \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} * e^{i\,\frac{Arg(z)}{n}}$$

Logarithmus

$$\log(z) = \ln(|z|) + i * \arg(z) \qquad \arg(z) \in \mathbb{R}$$

Funktionalgleichung: $\log(\omega * \omega') = \log(\omega) + \log(\omega')$

Hauptwert des Logarithmus

$$Log(z) = \ln(|z|) + i * Arg(z) \qquad Arg(z) \in [-\pi, \pi\,]$$

$$a^z = \{\ w = e^{z*u} : u \in \log(a)\}$$

$$p.v.\ \ a^z = e^{z*Log(a)} \quad ; \quad e^{Log(z)} = a$$

Topologie

Kreisscheibe $B(z_0, r) = \{\, z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\,\}$

Kreisring mit Zentrum z_0 : $\{\, z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\,\}$

offen : falls alle Punkte innere Punkte sind, d.h. kein Rand

kompakt : geschlossen und beschränkt

Möbius-Transformationen

Translation T_c : Verschiebung

$$z \rightarrow z + c$$

Drehstreckung S_a um z_0:

$$z \rightarrow a * z\ , \qquad a = |a| * e^{i\,\varphi} \in \mathbb{C}$$

Inversion I : danach in Gegenrichtung!

$$z \rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|} * e^{-i\,\varphi}$$

Möbius-Transformation
beliebige Komposition dieser Funktionen

$$T(z) = \frac{a * z + b}{c * z + d}$$

Linienintegral

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t)) * \gamma'(t)\,dt$$

Parametrisierungen von Kurven

Strecke zwischen z_1 und z_2

$$\gamma(t) = z_1 + (z_2 - z_1) * t \quad , \qquad t \in [0,1]$$

Kreis um z_0 mit Radius r

$$\gamma(t) = z_1 + r * e^{it} \quad , \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Falls im Uhrzeigersinn: $\gamma(t) = z_1 + r * e^{-it}$

2. Cauchy

Stetigkeit

Eine Funktion f heisst **stetig** in z0, falls

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Für alle zweidimensionalen Annäherungen!

Summe, Differenz u. Produkt sind ebenfalls stetig

Komplexe Ableitungen

Die Ableitung von f in z_0 ist

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Falls $f'(z_0) \in \mathbb{C}$, heisst **f differenzierbar in z_0**

Analytische / Holomorphe Funktionen

F heisst **analytisch / holomorph,** falls

- in jedem Punkt differenzierbar (f'(z) existiert)
- die Ableitung eine stetige Funktion ist

ganze Funktion: f analytisch auf $\mathbb{C}$

Linearität: $\frac{d}{dx}(f + g) = f' + \mu * g'$

Produktregel: $\frac{d}{dx}(f * g) = f' * g + f * g'$

Quotientenregel: $\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'*g - f*g'}{g^2}$

Kettenregel: $\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) * g'(x)$

Umkehrsatz: $f, g = f^{-1}$: $\quad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$

Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

$$F(x + iy) = u(x, y) + i\, v(x, y)$$

$$u = Re(f(z)) \quad v = Im(f(z))$$

f(z) analytisch / holomorph, falls

$$u_x = v_y \qquad u_y = -v_x$$

$$f_x + i\, f_y = 0$$

Eine reelwertige Funktion ist nie analytisch!

u(x,y) harmonisch, falls $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$

$$f(z)\ analytisch \to u\ \&\ v\ harmonisch$$

Integralsatz von Cauchy

einfach zusammenhängend: jede geschlossene Kurve in Ω enthält in ihrem Innern nur Punkte von Ω

f(z) holomorph, γ geschlossene Kurve um einfach zusammenhängendes Gebiet:

$$\oint_\gamma f(z) = 0 \quad , \quad \int_{\gamma_1} f(z) = \int_{\gamma_2} f(z)$$

Falls γ_1, γ_2 selbe Start- und Endpunkte A,B

Dann existiert eine **Stammfunktion F(z)**

$$F : \Omega \to \mathbb{C} : F'(z) = f(z)$$

Und es gilt für eine Kurve $\gamma\ von\ A\ nach\ B$:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = F(B) - F(A)$$

Integralformel von Cauchy

F(z) analytische Funktion, Ω zusammenhängendes Gebiet

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi\, i\, f(z_0)$$

$$f(z_0)^{(n)} = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$$

Im Gegenuhrzeigersinn positiv!

Mittelwerteigenschaft: Wert in z_0 = Mittelwert d. Kurve um z_0

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r * e^{it})\, dt$$

Maximum / Minimum-Prinzip

$$\exists\, z_0 \in \Omega : \quad |f(z_0)| = \frac{Max}{Min} |f(z)| \quad \to f\ konstant$$

Satz von Liouville

$$\exists\, M > 0: \quad |f(z)| \leq M \quad \to \quad f\ konstant$$

Ungleichung von Cauchy

$$|f(z)| \leq M$$

$$\forall\, z \in dB(z_0, r), \qquad B(z_0, r) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r \}$$

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n! * M}{r^n} \qquad \forall\, n \geq 1$$

3. Reihen

Taylorreihe

analytisch auf Kreisscheibe $|z| < r$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k$$

Geometrische Reihe:

konvergiert mit $\left|\frac{z}{c}\right| < 1$

$$\frac{1}{1-\frac{z}{c}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{c}\right)^k$$

$$|z| < a: \qquad \frac{1}{a} * \frac{1}{1-\frac{z}{a}}$$

$$|z| > a: \qquad \frac{-1}{z} * \frac{1}{1-\frac{a}{z}}$$

Harmonische Reihe: $s \in \mathbb{Q}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^s} \begin{cases} konvergiert & , \quad falls\ s > 1 \\ divergiert & , \quad falls\ s \leq 1 \end{cases}$$

Vergleichskriterien

Quotientenkriterium

$$q := \lim_{k \to \infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \begin{cases} konvergiert\ absolut & , \quad falls\ \ q < 1 \\ divergiert & , \quad falls\ \ q > 1 \end{cases}$$

Wurzelkriterium

$$L := \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_k|}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \begin{cases} konvergiert\ absolut & , \quad falls\ \ L < 1 \\ divergiert & , \quad falls\ \ L > 1 \end{cases}$$

Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ \dots$$

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-n+1) * c_k (z - z_0)^{k-n}$$

Konvergenzradius: $0 \leq \rho \leq \infty$

$$\rho := \lim_{k \to \infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_k|}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \begin{cases} konvergiert\ absolut & , \quad falls\ \ |x| < \rho \\ divergiert & , \quad falls\ \ |x| > \rho \end{cases}$$

Rand muss separat betrachtet werden: $z = \pm$ …

Stirling-Formel: $n! \approx n^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} * e^{-n} * \sqrt{2\pi}$

Exponentialreihe

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad , \ \rho = \infty$$

$$e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2m)!}$$

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2m+1)!}$$

$$\cosh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2m)!}, \qquad \sin h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2m+1)!}$$

Laurent-Reihen

analytisch auf Kreisring $a < |z - z_0| < b$

$$f(z) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} c_k \ (z - \ z_0)^k$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{dB(z_0,r)} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{k+1}}$$

Hauptteil: $\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z - z_0)^k$
Nebenteil: $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$, entsprich analytischer F.

Isolierte Singularitäten: einzige Sing. In ε-Umgebung

a) **hebbar**, falls

$$\lim_{z \to a} |f(z)| < \infty$$

bzw. der Hauptteil gleich null ist

$$\dots = c_{-2} = c_{-1} = 0$$

b) **Polstelle n-ter Ordnung** mit n Nullstellen im Nenner, falls

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = \cdots = \lim_{z \to a} |(z - z_0)^{n-1} f(z)| = \infty$$

$$\lim_{z \to a} |(z - z_0)^n f(z)| < \infty$$

bzw. der Hauptteil genau *n Terme besitzt*:

$$\dots = c_{n-2} = c_{n-1} = 0 , \qquad c_n \neq 0$$

c) **wesentliche Singularität**: Hauptteil ist unendlich lang

Nicht-isolierte Singularität: zB. $\tan\left(\frac{1}{z}\right), z \to \infty$

Laurent-Reihe entwickeln

(Ableitung einer anderen Reihe, zB. Exponentialreihe?)

1. Terme $(z - z_0)^n$ stehen lassen, Rest **Partialbruchzerlegung**
2. Aus PBZ geometrische Reihen bilden und summieren

4. Residuen

Residuensatz

$$\oint_{d\Omega} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_i \in \Omega} res(f \mid z_i) * n(\gamma(t), z_i)$$

Residuenberechnung

Über Laurentreihe

$res(f \mid z_i)$ = Koeff. c_{-1} der Laurentreihe um z_0

$res(f \mid z_i) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{dB(z_0,r)} f(z)\,dz$

Für Polstellen

einfach : $res(f \mid z_i) = \lim_{z \to z_i}(z - z_i) f(z)$

N-ter Ordnung :

$$res(f \mid z_i) = \lim_{z \to z_i} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} [\,(z - z_i)^n f(z)\,]$$

Für einfache Nullstelle

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)},\, z_0\ NS\ von\ q(z) \ \rightarrow\ res(f \mid z_i) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Uneigentliches Integral als Limes

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dt = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(z)\,dz$$

Gauss-Integral : $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\,ds = \sqrt{\pi}$

Uneigentliche Integrale

Für $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, $\deg(p) \leq \deg(q) - 2$

$H^+ : obere\ Halbebene$; $H^- : untere\ Halbebene$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \begin{cases} 2\pi i \sum_{z \in H^+} res(f \mid z_i) + \pi i \sum_{z \in \mathbb{R}} res(f \mid z_i) \\ -2\pi i \sum_{z \in H^-} res(f \mid z_i) - \pi i \sum_{z \in \mathbb{R}} res(f \mid z_i) \end{cases}$$

Falls $q(z) \neq 0\ \forall z \in \mathbb{R}$: $\alpha \neq 0 :\ \deg(p) \leq \deg(q) - 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = \begin{cases} 2\pi \boldsymbol{i} \sum_{z \in H^+} res(f\, e^{i\alpha x} \mid z_i) & \alpha \geq 0 \\ -2\pi \boldsymbol{i} \sum_{z \in H^-} res(f\, e^{i\alpha x} \mid z_i) & \alpha \leq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\alpha x) = \int_{-\infty}^{\infty} Re\{ f(x) e^{i\alpha x} dx \} = \begin{cases} -2\pi\, Im(\ldots) \\ 2\pi\, Im(\ldots) \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\alpha x) = \int_{-\infty}^{\infty} Im\{ f(x) e^{i\alpha x} dx \} = \begin{cases} 2\pi\, Re(\ldots) \\ -2\pi\, Re(\ldots) \end{cases}$$

Berechnung des Integrals auf dem Einheitskreis

$$Substitution\ z = e^{it}\ , dz = i\,z\,dt$$

$$\int_0^{2\pi} F(\sin(x), \cos(x)) = \int_{|z|=r} F\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right) \frac{1}{i\,z}\, dz$$

Berechnung über Residuensatz in Radius 1 um 0

$$= \int_{dB(0,1)} \tilde{F}\, dz = 2\pi i \sum_{z_i \in B(0,1)} res(\tilde{F},\ z_i)$$

$$\tilde{F} = \frac{1}{i\,z} * F\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right)$$

5. Fourier & Laplace

Fourierreihen

Für eine T-periodische Funktion $f(t) = f(t + T)$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{ik\frac{2\pi}{T}t}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k\,\frac{2\pi}{T}\,t\right) + b_k \sin(k\,\frac{2\pi}{T}\,t)$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} f(t)\, e^{-ik\frac{2\pi}{T}t}\, dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} f(t)\, \cos\left(k\,\frac{2\pi}{T}\,t\right) dt\ , \qquad k \geq 0$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} f(t) \sin\left(k\,\frac{2\pi}{T}\,t\right) dt\ , \qquad k \geq 1$$

$a_0/2$: arithmetisches Mittel der Funktion

Umrechnung zwischen reeller und komplexer Reihe

$$a_0 = 2\,c_0\ ;\ a_k = c_k + c_{-k}\ ;\ b_k = i\,(c_k - c_{-k})$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}\ ;\ c_k = \frac{a_k - i\,b_k}{2}\ ;\ c_{-k} = \frac{a_k + i\,b_k}{2} = \overline{c_k}$$

Gerade Funktion: $f(t) = f(-t)$

$$b_k = 0\ ;\ a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t)\, \cos\left(k\,\frac{2\pi}{T}\,t\right) dt$$

Ungerade Funktion: $f(t) = -f(-t)$

$$a_k = 0\ ;\ b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t)\, \sin\left(k\,\frac{2\pi}{T}\,t\right) dt$$

Fouriertransformation

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\,\omega\, t}\, dt$$

Rücktransformation: $\hat{f}^{-1}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\,\hat{f}(-\omega)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)\, e^{i\,\omega\, t}\, d\omega$$

Existieren, falls $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)| < \infty$ $bzw.$ $\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(t)| < \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-ib)^2} dt$$

Faltung

Falls f, g $2\pi - periodisch$: $\hat{h}(\omega) = \hat{f}(\omega) * \hat{g}(\omega)$

$$(f*g)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t-\tau)\, d\tau$$

Sonst

$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t-\tau)\, d\tau$$

Laplace

$$(f*g)(t) = \int_{0}^{t} f(\tau) * g(t-\tau) d\tau \quad , \quad g(t-\tau) \equiv 0 \equiv f(\tau)$$

Laplacetransformation $f(t) \equiv 0 \;\; t < 0$

$$F(t) = \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-s\,t}\, dt \qquad t \geq 0$$

Rücktransformation

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(t)\, e^{s\,t}\, ds$$

$\boldsymbol{s = \sigma + i\omega, \sigma > \sigma_0}$ **: Wachstumskoeffizient,** $\boldsymbol{|f(t)| \leq M * e^{\sigma t}}$

11. Tabellen

$$i = \sqrt{1} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\tan' x = 1 + \tan^2 x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cos(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$$

$$\sin(z) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$$

Grad	Rad	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\tan\varphi$
$0°$	0	0	1	0
$30°$	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\frac{1}{2}\pi$	1	0	
$120°$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$135°$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$150°$	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$180°$	π	0	-1	0

Additionstheoreme

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

Doppelter und halber Winkel

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi \qquad \sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos\varphi)$$

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \qquad \cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos\varphi)$$

$$\tan 2\varphi = \frac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi} \qquad \tan^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}$$

Umformung einer Summe in ein Produkt

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Umformung eines Produkts in eine Summe

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$$

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)$$

Reihenentwicklungen

$$e^x = 1 + x + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\operatorname{artanh} x = x + \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Summe der ersten n-Zahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Fourier-Korrespondenzen

$f(t)$	$\widehat{f}(\omega)$
e^{-at^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{-\omega^2}{4a}}$
$e^{-a\|t\|}$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$

Eigenschaften der Fourier-Transformation

Eigenschaft	$f(t)$	$\widehat{f}(\omega)$
Linearität	$\lambda f(t) + \mu g(t)$	$\lambda \widehat{f}(\omega) + \mu \widehat{g}(\omega)$
Ähnlichkeit	$f(at) \quad a > 0$	$\frac{1}{\|a\|} \widehat{f}(\frac{\omega}{a})$
Verschiebung	$f(t-a)$ $e^{ait} f(t)$	$e^{-ai\omega} \widehat{f}(\omega)$ $\widehat{f}(\omega - a)$
Ableitung	$f^{(n)}(t)$ $t^n f(t)$	$(i\omega)^n \widehat{f}(\omega)$ $i^n \widehat{f}^{(n)}(\omega)$
Faltung	$f(t) * g(t)$	$\widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega)$

Partialbruchzerlegung (PBZ)

Reelle Nullstellen n-ter Ordnung:

$$\frac{A_1}{(x - a_k)} + \frac{A_2}{(x - a_k)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x - a_k)^n}$$

Paar komplexer Nullstellen n-ter Ordnung:

$$\frac{B_1 x + C_1}{(x - a_k)(x - \overline{a_k})} + \ldots + \frac{B_n x + C_n}{[(x - a_k)(x - \overline{a_k})]^n} +$$

$$(x - a_k)(x - \overline{a_k}) = (x - Re)^2 + Im^2$$

Laplace- Korrespondenz

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$\sigma(t)$	1	$H(t-a)$	$\frac{1}{s} e^{-as}$
1	$\frac{1}{s}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
t	$\frac{1}{s^2}$	te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$

Eigenschaften der Laplace-Transformation

Eigenschaft	$f(t)$	$F(s)$
Linearität	$\lambda f(t) + \mu g(t)$	$\lambda F(s) + \mu G(s)$
Ähnlichkeit	$f(at) \quad a > 0$	$\frac{1}{a} F(\frac{s}{a})$
Verschiebung im Zeitbereich	$f(t - t_0)$	$e^{-st_0} F(s)$
Verschiebung im Bildbereich	$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
Ableitung im Zeitbereich	$f'(t)$ $f''(t)$ $f^{(n)}$	$sF(s) - f(0)$ $s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$ $s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) s^{n-k-1}$
Ableitung im Bildbereich	$-tf(t)$ $t^2 f(t)$ $(-t)^n f(t)$	$F'(s)$ $F''(s)$ $F^{(n)}(s)$
Integration im Zeitbereich	$\int_0^t f(u)\,du$	$\frac{1}{s} F(s)$
Integration im Bildbereich	$\frac{1}{t} f(t)$	$\int_s^\infty F(u)\,du$
Faltung	$f(t) * g(t)$	$F(s) \cdot G(s)$
Periodische Funktion	$f(t) = f(t+T)$	$\frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(t) e^{-st}\,dt$

Ableitungen

Potenz- und Exponentialfunktionen			Trigonometrische Funktionen		Hyperbolische Funktionen	
$f(x)$	$f'(x)$	Bedingung	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$	$\sin x$	$\cos x$	$\sinh x$	$\cosh x$
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{Z}_{<0},\ x \neq 0$	$\cos x$	$-\sin x$	$\cosh x$	$\sinh x$
x^a	ax^{a-1}	$a \in \mathbb{R},\ x > 0$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\log x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
e^x	e^x		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
a^x	$a^x \cdot \log a$	$a > 0$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Stammfunktionen

$f(x)$	$F(x)$	Bedingung	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$	$\frac{1}{x}$	$\log \lvert x \rvert$	$\sin(\omega t)\sin(\omega t)$	$\frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega}$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$n \in \mathbb{Z}_{\leq -2},\ x \neq 0$	$\tan x$	$-\log \lvert \cos x \rvert$	$\sin(\omega t)\cos(\omega t)$	$-\frac{\cos(2\omega t)}{4\omega}$
x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$	$a \in \mathbb{R},\ a \neq -1,\ x > 0$	$\tanh x$	$\log(\cosh x)$	$\sin(\omega t)\sin(n\omega t)$	$\frac{n\cos(\omega t)\sin(n\omega t)-\sin(\omega t)\cos(n\omega t)}{\omega(n^2-1)}$
$\log x$	$x\log x - x$	$x > 0$	$\sin^2 x$	$\frac{1}{2}(x - \sin x\cos x)$	$\sin(\omega t)\cos(n\omega t)$	$\frac{n\sin(\omega t)\sin(n\omega t)+\cos(\omega t)\cos(n\omega t)}{\omega(n^2-1)}$
e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax}$	$a \neq 0$	$\cos^2 x$	$\frac{1}{2}(x + \sin x\cos x)$	$\cos(\omega t)\sin(n\omega t)$	$\frac{\sin(\omega t)\sin(n\omega t)+n\cos(\omega t)\cos(n\omega t)}{\omega(1-n^2)}$
a^x	$\frac{a^x}{\log a}$	$a > 0,\ a \neq 1$	$\tan^2 x$	$\tan x - x$	$\cos(\omega t)\cos(n\omega t)$	$\frac{\sin(\omega t)\cos(n\omega t)+n\cos(\omega t)\sin(n\omega t)}{\omega(1-n^2)}$

Standard-Substitutionen

Integral	Substitution	Ableitung	Bemerkung
$\int f(x,\ x^2+1)\,dx$	$x = \tan t$	$dx = \tan^2 t + 1\,dt$	$t \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$
$\int f(x,\ \sqrt{ax+b})\,dx$	$x = \frac{t^2-b}{a}$	$dx = \frac{2}{a}t\,dt$	$t \geq 0$
$\int f(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$	$x + \frac{b}{2a} = t$	$dx = dt$	$t \in \mathbb{R}$, quadratische Ergänzung
$\int f(x,\ \sqrt{a^2-x^2})\,dx$	$x = a\sin t$	$dx = a\cos t\,dt$	$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2},\ 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$
$\int f(x,\ \sqrt{a^2+x^2})\,dx$	$x = a\sinh t$	$dx = a\cosh t\,dt$	$t \in \mathbb{R},\ 1 + \sinh^2 x = \cosh^2 x$
$\int f(x,\ \sqrt{x^2-a^2})\,dx$	$x = a\cosh t$	$dx = a\sinh t\,dt$	$t \geq 0,\ \cosh^2 x - 1 = \sinh^2 x$
$\int f(e^x,\ \sinh x,\ \cosh x)\,dx$	$e^x = t$	$dx = \frac{1}{t}\,dt$	$t > 0,\ \sinh x = \frac{t^2-1}{2t},\ \cosh x = \frac{t^2+1}{2t}$
$\int f(\sin x,\ \cos x)\,dx$	$\tan\frac{x}{2} = t$	$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$	$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$