Analysis Zusammenfassung

Andreas Biri, D-ITET 31.07.13

1. Grundlagen

A v B : „oder“ ; A ^ B : „und“ ; ¬ A : „nicht“

$A \cup B$: „vereint mit“ ; $A \cap B$: „geschnitten mit“

A = $|A|$: Anzahl Elemente (Mächtigkeit, Kardinalität)

$$|a * b| = |a| * |b| \; ; \; |a+b| \leq |a| + |b|$$

$$|a-c| \leq |a-b| + |b-c|$$

Vollständige Induktion

1. **Induktionsverankerung:** gilt für n_0 = 0 oder 1
2. **Induktionsannahme:** Behauptung gelte
3. **Induktionsschritt:** auf beiden Seiten addieren und umformen

$$A(n) \to A(n+1) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$$

Komplexe Zahlen

$$\boxed{z = x + i\,y = r * e^{i\,\varphi} = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi\,),\ z \in \mathbb{C}}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ \varphi = \arg(x,y)$$

$\bar{z} = x - i\,y$: *konjugiert komplexe Zahl*

$$x = \mathrm{Re}\{\,z\,\} = \frac{z+\bar{z}}{2} \quad , \quad y = \mathrm{Im}\{\,z\,\} = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

$$|z| = \sqrt{z * \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$e^{i\,\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad ; \quad \overline{e^{i\,\varphi}} = e^{-i\,\varphi}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(z) &= Re\{e^{i\,\varphi}\} = \frac{e^{i\,z} + e^{-i\,z}}{2} \\ \sin(z) &= Im\{e^{i\,\varphi}\} = \frac{e^{i\,z} - e^{-i\,z}}{2i}\end{aligned}}$$

Wurzel einer komplexen Zahl

$$z^n = (\,r * e^{i\,\varphi}\,)^n = r^n * e^{i\,(n*\varphi)}$$

$$\to \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} * e^{i\,(\frac{\varphi}{n} + k*\frac{360°}{n})}$$

Vektoren

Skalarprodukt: $\vec{a} * \vec{b} = |a|\,|b| \cos\varphi$

Vektorprodukt: $\vec{a}\ x\ \vec{b} = -\vec{b}\ x\ \vec{a}$ (senkrecht zu a u. b)

$|\vec{a}\ x\ \vec{b}| = |a|\,|b| \sin\varphi$: Fläche des aufgesp. Parallelogramms

$$|x-a| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2}$$

$$\|x-a\| := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i - a_i| \quad \to \quad \frac{|x-a|}{\sqrt{n}} \leq \|x-a\| \leq |x-a|$$

2. Funktionen

Eigenschaften von Funktionen

Surjektiv: Es gibt für jeden Wert in B einen Wert in A:

$$\forall\, y \in B\ \exists\, x \in A : f(x) = y$$

Injektiv: jeder Punkt hat verschiedene Funktionswerte

$$\forall\, x_1, x_2 \in A\,, x_1 \neq x_2 : f(x_1) \neq f(x_2)$$

Bijektiv: für alle Punkte in B gibt es exakt einen Punkt in A

$$\forall\, y \in B\ \exists!\, x \in A : f(x) = y$$

Falls bijektiv: $\exists!\ Umkehrabbildung\ f^{-1} : B \to A$

$$monoton \begin{cases} steigend: f(x_1) \leq f(x_2) \\ fallend:\ \ f(x_1) \geq f(x_2) \end{cases},\ \ x_1 < x_2$$

Streng monoton : $f(x_1) < f(x_2)\ \ bzw.\ \ f(x_1) > f(x_2)$

Intervalle

$[a,b] := \{\,a \leq x \leq b\,\}$ abgeschlossen

$]a,b[:= \{\,a < x < b\}$ offen

Stetigkeit

Eine Funktion $f: A \to B$ heisst **stetig in x_0**, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle Punkte in A:

$$|x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Stückweise stetig: ausserhalb einer NS stetig

Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante C:

$$|x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|$$

- Kompositionen stetiger Funktionen sind stetig.
- Die Umkehrfunkt. einer stetigen Abb. ist stetig.
- Aus stetigen Funktionen gebildete rationale Ausdrücke sind stetig, sofern definiert.
- Jede differenzierbare Funktion ist lokal lipschitz-stetig.

Stetigkeitssätze: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion

Zwischenwertsatz: Sei $a < b$. f nimmt jeden Wert zwischen f(a) und f(b) an (finde immer x, s.d. …)

Nullstellensatz: f(a) und f(b) haben verschiedene Vorzeichen. Dann besitzt f in [a,b] mindestens eine Nullstelle.

Extremwertsatz: Da stetig, ist f in [a,b] beschränkt und besitzt ein absolutes Maximum und Minimum.

Grenzwerte

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta\,, falls\ \forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0 :$$

$$|x-\xi| < \delta \to |f(x)-\eta| < \varepsilon$$

Sprungstelle: linker und rechter Limes existieren, sind aber verschieden

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta\,,\quad \lim_{y\to\eta} g(y) = \theta$$

$$\to\quad \lim_{x\to\xi} g\big(f(x)\big) = \lim_{y\to\eta} g(y) = \theta$$

Asymptotisch gleich: $\lim_{t\to\infty}|f(t)-g(t)| = 0$

Vergleichskriterium: $\lim_{x\to\xi} f(x) = 0\,;\ |g(x)| \le C\, f(x)$

$$\lim_{x\to\xi} g(x) = 0\,,\qquad da\ f(x)\ konvergiert$$

3. Reihen

Die Reihe konvergiert, falls es einen Grenzwert ξ gibt, s.d. :

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, k_0 \in \mathbb{N} :\ \forall\, k > k_0 :\ |x_k - \xi| < \varepsilon$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ **konvergiert absolut**, falls die dazugehörige Betragsreihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Geometrische Reihe: konvergiert mit $|x| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

Harmonische Reihe: $s \in \mathbb{Q}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^s} \begin{cases} konvergiert & ,\ falls\ s > 1 \\ divergiert & ,\ falls\ s \le 1 \end{cases}$$

Alternierende Reihe: konvergiert für $c_k > 0\,, \lim_{k\to\infty} c_k = 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, c_k = c_0 - c_1 + c_2 - \ldots$$

Binominalreihe: für $|x| < 1$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} * x^k$$

Vergleichskriterien

Majorantenkriterium

Für zwei Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ gelte: $|a_k| \le |b_k|$

- Konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$, so konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$
- Divergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, so divergiert $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$

Quotientenkriterium

$$q := \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \begin{cases} konvergiert\ absolut & ,\ falls\ q < 1 \\ divergiert & ,\ falls\ q > 1 \end{cases}$$

Wurzelkriterium

$$L := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_k|}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \begin{cases} konvergiert\ absolut & ,\ falls\ L < 1 \\ divergiert & ,\ falls\ L > 1 \end{cases}$$

Konvergenzradius: $\rho = \frac{1}{q}\ \ bzw.\ \ \rho = \frac{1}{L}$

Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots$$

$a_k = \frac{1}{k!}$: Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

$a_K = 1$: Geometrische Reihe

Konvergenzradius: $0 \le \rho \le \infty$

$$\rho := \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_k|}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \begin{cases} konvergiert\ absolut & ,\ falls\ |x| < \rho \\ divergiert & ,\ falls\ |x| > \rho \end{cases}$$

Exponentialreihe

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\ ,\ \rho = \infty$$

- Exponentialfunk. wächst schneller als jede Potenz
- Logarithmus wächst langsamer als jede Potenz

$$e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!},\qquad \sin h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

4. Differenzialrechnung

Eine Funktion $f: I \to A$ ist an der Stelle $x_0 \in I$ **differenzierbar**, falls folgender Grenzwert existiert:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{y\to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Jede differenzierbare Funktion ist stetig.

Landau-Symbol: $o: \lim_{t_0\to 0} \frac{A-B}{C} = 0$

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + f'(t_o) * h + o(h)$$

Ableitungsregeln

Summenregel

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda f(x) + \mu g(x)\right) = \lambda * f'(x) + \mu * g'(x)$$

Produktregel

$$\frac{d}{dx}\left(f(x) * g(x)\right) = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$$

Quotientenregel

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x) * g(x) - f(x) * g'(x)}{g(x)^2}$$

Kettenregel

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) * g'(x)$$

Umkehrsatz: Ableitung der Umkehrfunktion

$$f, g = f^{-1}: \qquad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Partielle Ableitungen: nach je einer Variabel differenzieren, Rest als konstant betrachten

Ableitung der Potenzreihe: ρ bleibt gleich

Kritische Punkte

$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	
$=0$	<0		Lokales Max.
$=0$	>0		Lokales Min.
$=0$	$=0$	$\neq 0$	Sattelpunkt
	$=0$	$\neq 0$	Wendepunkt

Extremalwerte auf [a,b]

1. kritische Punkte innerhalb I betrachten
2. Randpunkte *a,b* betrachten

Mittelwertsatz

1. Für eine differenzierbare Funktion $f:]a,b[\to \mathbb{R}$

$$\exists\, \xi \in [a,b]: \quad f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Satz von Rolle: $f(a) = f(b) \to f'(\xi) = 0$

2. $f, g:]a,b[\to \mathbb{R}$, $g'(x) \neq 0$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Korollar: *Sei* $|f'(x)| \le M \quad \forall x \in I$

$$|f(t_2) - f(t_1)| \le M\, |t_2 - t_1|$$

Bernoulli – de l'Hôpital

Falls $lim\,(fx) = lim\, g(x) = 0 \,/\, \infty$

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Taylor

Entwicklung bei x_0, falls mindestens (n+1)-mal diff.bar

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots$$

Fehlerabschätzung: Man nehme $\tau \in [x, x_0]$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

Konvergenzradius: für $x_0 = 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} * x^k \quad, wobei\ a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

ODER: zB. $\frac{a}{(1-ax)^2}$ -> Als Ableitung d. geom. Reihe

Newton-Verfahren

x_0 : Startpunkt, möglichst nahe bei Nullstelle ξ

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad, \quad \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \xi$$

Bedingung:

- f hat in I genau eine Nullstelle ξ
- f ist entweder konkav oder konvex (kein Extremum)

5. Integration

Seien eine Funktion $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, eine beliebige Zerlegung Z von [a,b] in n Teilintervalle gegeben:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$[a,b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n]$$

$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \quad \textit{Stützstelle in Intervall}$$

Durchmesser $diam(B) := \sup\{ |x-y| \mid x, y \in B\}$
Korn $\delta(x) = \max_{k=1,\dots,n} diam(B_k)$

Dann heisst f **Riemann-integrierbar**, falls der folgende Grenzwert existiert ($\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$)

$$\lim_{\delta(x) \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) * \Delta x_k =: \int_a^b f(x)\, dx$$

Jede stückweise stetige Funktion ist integrierbar.

Hauptsatz der Differenzialrechnung

Stammfunktion: $F(x) := \int_a^x f(t)\, dt + const.$

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a) \quad (a, b \in I)$$

$$\frac{d}{dy} \int_a^y f(x)\, dx = f(y)$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R} \quad : \quad \exists\, \xi \in [a,b], s.d.$$

$$\int_a^b f(t)\, dt = f(\xi)(b-a)$$

Eigenschaften des Integrals:

Vertauschen von Grenzen

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

Additivität

$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx$$

Absolutbetrag

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Integrationstechniken

Partielle Integration

$$\int u(t) * v'(t)\, dt = u(t) * v(t) - \int u'(t) * v(t)\, dt$$

Trick: $\int \log(x) = \int 1 * \log(x) = x * \log(x) - \dots$

Substitution

1. $\varphi(t) := x \rightarrow \ dx = \varphi'(t)\, dt$

$$\int_a^b f(\varphi(t)) * \varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx$$

2. $x := \varphi(t)$, $dx := \varphi'(t)\, dt$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\, dt$$

Partialbruchzerlegung -> siehe Verschiedenes

Uneigentliche Integrale

$f: B \rightarrow \mathbb{R}^n$: f unbeschränkt, oder B unbeschränkt

Falls das folgende Integral $\forall\, \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ definiert ist und

$$\lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0} \int_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} f(t)\, dt$$

existiert ($\neq \pm\infty$), so heisst dieser Grenzwert **das uneigentliches Integral** $\int_a^b f(t)\, dt$.

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\, dt = \lim_{b \to \infty} \int_0^b \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

1. $\boldsymbol{f} : [\boldsymbol{a}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig, beschränkt

$$\exists\, C \geq 0,\ t_0 > \max\{a, 0\} : \quad \forall\, t \geq t_0$$

i) $\alpha > 1: \quad |f(t)| \leq \frac{C}{t^\alpha}$

so existiert das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(t)\, dt$

ii) $f(t) \geq \frac{C}{t}$

so divergiert das uneigentliche Integral / existiert nicht.

2. $\boldsymbol{g} : (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{b}] \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig auf $[\varepsilon, b]$, $\varepsilon > 0$

$$\exists\, C > 0,\ 0 \leq t_0 \leq b : \quad \forall\, t < t_0$$

i) $\beta < 1: \quad |g(t)| \leq \frac{C}{t^\beta}$

so existiert das uneigentliche Integral $\int_0^b f(t)\, dt$

ii) $g(t) \geq \frac{C}{t}$

so divergiert das uneigentliche Integral / existiert nicht.

6. Differenzialgleichungen

Homogene DGL mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0\, y = 0$$

1. Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x} \rightarrow charakteristisches\ Polynom$

$$chp(\lambda) \coloneqq \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

Die Nullstellen heissen Eigenwerte der DGL.

2. Für einen komplexen Eigenwert $\lambda = a + ib$ gilt:

$$y_h(x) = Ae^{\lambda_0 x} + Be^{\overline{\lambda_0} x} = e^{ax}(A * e^{ibx} + B * e^{-ibx})$$

3. Jeder *m*-fache Eigenwert führt zu **Fundamentallösungen**

$$e^{\lambda_0 x}, x\, e^{\lambda_0 x}, x^2 e^{\lambda_0 x}, \ldots, x^{m-1}\, e^{\lambda_0 x}$$

Die allgemeine homogene Lösung $y_h(x)$ besteht aus der *Linearkombination aller Fundamentallösungen*.

Inhomogene DGL mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0\, y = K(x)$$

1. Die allgemeine Lösung besteht aus der Summer der homogenen und der partikulären Lösung:

$$y_{allgemein} = y_{homogen} + y_{partikulär}$$

2. Für eine Störfunktion der Form

$$K(x) \coloneqq q(x)e^{\lambda_0 x} \quad , \qquad Grad(q) = r$$

und einen *m*-fachen Eigenwert λ_0 , so ist die partikuläre Lösung mit zu bestimmenen Koeffizenten A_k

$$y_p = (A_0 + A_1\, x + \ldots + A_r\, x^r) * x^m * e^{\lambda_0 x}$$

$$K(x) = x^r, 0\ m - facher\ EW \rightarrow y_p = (A_0 + A_1\, x + \ldots + A_r\, x^r) * x^m$$

$$K(x) = e^{\lambda_0 x}, \lambda_0\ KEIN\ EW \rightarrow y_p = \frac{1}{chp(\lambda)} e^{\lambda_0 x}$$

Separierbare Differenzialgleichung

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = f(x) * g(y)$$

Falls y_0 eine NS von g(y) ist, so ist $y(x) = y_0$ eine Lösung.

1. **Separation der Variabeln:** Variabeln je auf eine Seite

$$\frac{1}{g(y)}\, dy = f(x)\, dx$$

2. Beide Seiten integrieren

i) Allgemeine Lösung:

$$\int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int f(x)\, dx$$

ii) Anfangswertproblem $y(x_0) = y_0$:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(y)}\, dy = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx$$

Homogene Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y'(x) = f(x) * y$$

Eine homogene DGL 1. Ordnung ist separierbar:

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \log(y) + k = \int f(x)\, dx = F(x)$$

$$y(x) = C * e^{F(x)}$$

Inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung

1. Homogene Lösung finden:

$$y(x) = C * e^{F(x)} = C * Y(x)$$

2. **Variation der Konstante**: $C \rightarrow C(x)$

3. In ursprüngliche Gleichung einsetzen und lösen:

$$y'(x) = f(x)y + K(x)$$

$$C'(x)Y(x) + C(x)Y'(x) = C(x)f(x)Y(x) + K(x)$$

Da $Y'(x) = f(x) * Y(x)$ (da homogene Lösung)

$$C = \int \frac{K(x)}{Y(x)}\, dx \rightarrow C + C_0$$

$$y(x) = (C(x) + C_0) * Y(x)$$

Homogene Differentialgleichung

$$y' = f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y)$$

1. **Substituiere** $\boldsymbol{u \coloneqq \frac{y}{x}}$ **,** $\boldsymbol{y = u * x}$ **,**

sodass *f* nur noch von u abhängt -> f(u)

2. y nach x ableiten -> Separierbare DGL

$$y' = u' * x + u = f(u)$$

3. u durch Separation der Variabeln x,u bestimmen und am Ende y rücksubstituieren

$$\frac{du}{dx}\, x = f(u) - u$$

$$\frac{1}{f(u) - u}\, du = \frac{1}{x}\, dx$$

7. Mehrdimensionale Integralrechnung

Dreidimensionale Berechnungen

Volumen

$$V(K) = \int_K 1 \, d\mu(x,y,z)$$

Variable Massenverteilung

$$m(K) = \int_K \rho(x,y,z) \, d\mu(x,y,z)$$

Schwerpunkt

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} = \frac{1}{m(K)} \int_K \rho(x,y,z) * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} d\mu(x,y,z)$$

Für einen homogenen Körper ($\rho = konst.$) gilt:

$$\vec{s} = \frac{1}{V(K)} \int_K \vec{r} * d\mu(x,y,z)$$

Trägheitsmoment

Bezüglich der z-Achse gilt

$$\Theta = \int_B \rho(x,y,z)(x^2+y^2) \, dV$$

Falls Masse m bereits gegeben: $\Theta = m \int (x^2+y^2) \, dV$

Für einen rotationssymmetrischen Körper gilt

$$\Theta = 2\pi \int_a^b \int_0^{r(z)} \rho(r,z) \, r^3 \, dr \, dz$$

Satz von Steiner (für parallele Achsen)

$$\Theta_2 = \Theta_1 + m * d^2$$

Variablensubstitution / Transformation

$x : \tilde{B} \to B$ bijektiv, stückweise stetig -> $\tilde{f}(u) = f(x(u))$

$$\int_B f(x) \, dx = \int_{\tilde{B}} \tilde{f}(u) \, |J_f(u)| \, du$$

J_f : Funktionaldeterminante

Integration in **Zylinderkoordinaten:**

$$dV = \boldsymbol{r} \, dr \, d\varphi \, dz$$

Integration in **Kugelkoordinaten:**

$$dV = \boldsymbol{r^2 \cos\vartheta} \, dr \, d\varphi \, d\vartheta$$

Zylinderkoordinaten

$$\begin{cases} x = r * \cos\varphi \\ y = r * \sin\varphi \\ z = z \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \arg(x,y) \\ z = z \end{cases}$$

Kugelkoordinaten

$$\begin{cases} x = r * \cos\vartheta \cos\varphi \\ y = r * \cos\vartheta \sin\varphi \\ z = r * \sin\vartheta \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \varphi \in [\,0\,, 2\pi\,] \\ \vartheta \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\,] \end{cases}$$

Rotationskörper

$$\int_B f(x,y,z) \, dV = 2\pi \int_a^b \int_0^{g(z)} f(r*\cos\varphi, r*\sin\varphi, z) \, r \, dr \, dz$$

$$Vol(B) = \pi \int_a^b g(z)^2 \, dz$$

8. Mehrdimensionale Differentialrechnung

Richtungsableitung und partielle Ableitung

$$f: \Omega \to \mathbb{R}, \qquad \Omega \subset \mathbb{R}^n \; offen$$

Die **Richtungsableitung** von f an der Stelle $\vec{x_0} \in \Omega$ **in Richtung des Einheitsvektors $\vec{e}$** $\subset \mathbb{R}^n$ ist der Grenzwert

$$(D_{\vec{e}} \, f)(\vec{x_0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{x_0} + t * \vec{e}) - f(\vec{x_0})}{t}$$

Wählt man für $\vec{e}$ $(|\vec{e}| = 1)$ den Koordinateneinheitsvektor $\vec{e_i}$, $i = 1, \ldots, n$, so erhält man die **partielle Ableitung von f nach x_j an der Stelle x_0** :

$$\frac{df}{d\,x_i}(\,x_0\,) = (\,D_{e_i} f)(x_0\,) = (\,\nabla f(z_0)) * \vec{e}$$

Gradient: zeigt in Richtung der stärksten Steigung

-> Partiell ableiten nach $x_1, \ldots, x_n$

$$(\,\nabla f)(\,x_0\,) = (grad\; f)(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{df}{d\,x_1}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{df}{d\,x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Totale Ableitung: Eine differenzierbare Funktion f lässt sich wie folgt approximieren, wobei $z_0 \in \Omega$

$$f(z) = f(z_0) + (\,\nabla f)(z_0) * (z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

$$= f(z_0) + \frac{df}{d\,x_1}(z_0)(x_1 - x_{01}) + \ldots + \frac{df}{d\,x_n}(z_0)(x_n - x_{0n})$$

Tangente

$$T_p\gamma = \begin{pmatrix} x'(p_x) \\ y'(p_y) \end{pmatrix}, \quad p \in Gerade\;\gamma$$

Tangentialebene: $z = f(\vec{x}_0) + (\nabla f)(\vec{x}_0) * (\vec{x} - \vec{x}_0)$

Mehrdimensionale Kettenregel

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n : g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} f\big(g(t)\big) = (\nabla f)\big(g(t)\big) * g'(t)$$

$$= \frac{d f}{d g_1}(g(t)) * g_1'(t) + \ldots + \frac{d f}{d g_n}(g(t)) * g_n'(t)$$

Differentiation unter dem Integral

$$\frac{d}{dt}\int_B f(x,t)\,dx = \int_B \frac{d}{dt} f(x,t)\,dx$$

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{d}{dt} f(x,t)\,dx - f(a(t),t) * a'(t) + f(b(t),t) * b'(t)$$

Hesse-Matrix

Für eine zweimal diff.bare Funktion f gilt:

$$\mathcal{H}(f)(z_0) = \left(\frac{d^2 f}{dx_i dx_j}(z_0)\right)_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{d^2 f}{dx_1^2} & \cdots & \frac{d^2 f}{dx_1 dx_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d^2 f}{dx_1 dx_n} & \cdots & \frac{d^2 f}{dx_n^2} \end{pmatrix}(z_0)$$

Mehrdimensionale Taylor-Entwicklung

$$f(\vec{x}_0 + h) = f(\vec{x}_0) + \big(\nabla f(\vec{x}_0)\big)\, h + \frac{1}{2} h^T \mathcal{H}(f)(\vec{x}_0)\, h + o(|h|^2)$$

Taylor 1. Grades: Approximation durch Tangentialebene

$$f(\vec{x}) \approx f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) * (\vec{x} - \vec{x}_0)$$

Taylor 2. Grades mit 2 Variabeln: $\Delta x = x - x_o, \Delta y = y - y_0$

$$j^2 f(\vec{x}_0) = f(\vec{x}_0) + f_x(\vec{x}_0)\,\Delta x + f_y(\vec{x}_0)\,\Delta y + \frac{1}{2} f_{xx}(\vec{x}_0)\,\Delta x^2 + f_{xy}(\vec{x}_0)\,\Delta x \Delta y + \frac{1}{2} f_{yy}(\vec{x}_0)\,\Delta y^2$$

Taylor 2. Grades mit *n* Variabeln:

$$j^2 f(\vec{x}_0) = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \overrightarrow{x_0}) + \frac{1}{2}(\vec{x} - \overrightarrow{x_0})^T \mathcal{H}(f)(\vec{x}_0)(\vec{x} - \overrightarrow{x_0})$$

Kritische Punkte

Falls z_0 ein **kritischer Punkt / lokales Extremum** ist, gilt:

$$(\nabla f)(\overrightarrow{x_0}) = 0$$

Für die Eigenwerte λ_i der Hessematrix $\mathcal{H}(f)(\overrightarrow{x_0})$ gilt:

- $\forall \lambda_i > 0$: $\to$ *Lokales Minimum*
- $\forall \lambda_i < 0$: $\to$ *Lokales Maximum*
- $\exists \lambda_i > 0 \wedge \exists \lambda_i < 0$: $\to$ *Sattelpunkt*

$\exists \lambda_i = 0$ -> muss näher betrachtet werden

Pos. definiert : Min ; Neg. definiert : Max ; indefinit : Sattelpunkt

Für n = 2: f(x,y)

$$\det \mathcal{H}(f) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

$$tr\ \mathcal{H}(f) = f_{xx} + f_{yy} \qquad \mathcal{H}(f) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

- $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$
  - $f_{xx} + f_{yy} > 0 \to$ Lok. Minimum
  - $f_{xx} + f_{yy} < 0 \to$ Lok. Maximum
- $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0 \to$ Sattelpunkt

n-dimensionaler Bereich B

1. kritischen Punkte von f im Innern von B $\to \nabla f = 0$
2. „bedingt kritische Punkte" von f im Innern jeder Seitenfläche (kritische Punkte nach Parametrisierung)
3. die Werte an den Ecken / Rändern

-> finde globales Maximum und Minimum

Lagrange-Multiplikatoren

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: Suche kritische Punkte von f auf einer d-dimensionalen Fläche, gegeben durch r = n-d Gleichungen

$$F_1(x_1, \ldots, x_n) = 0$$
$$\vdots$$
$$F_r(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

Dann müssen die kritischen Punkte zusätzlich zu den Nebenbedingungen folgende Gleichung erfüllen

$$\nabla f(\vec{x}) = \lambda_1 \nabla F_1(\vec{x}) + \ldots + \lambda_r \nabla F_r(\vec{x})$$

Dies folgt aus der Lagrange'sche Pirinzipalfunktion

$$\Phi(\vec{x}, \lambda) = f(\vec{x}) - \lambda_1 F_1(\vec{x}) - \lambda_2 * \ldots = 0$$

Achtung: λ nicht berechnen

➔ Löse das Gleichungssystem

$$\frac{d\Phi}{d x_1} = \frac{d f}{d x_1} - \ldots = 0$$
$$\vdots$$
$$\frac{d\Phi}{d x_n} = \frac{d f}{d x_n} - \ldots = 0$$

und setze in die Nebenbedingungen F_n ein

Satz über implizite Funktionen

$$\Omega \subset \mathbb{R}^2, f: \Omega \to \mathbb{R}$$

$$C: \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0 \}$$

Für $(x_0, y_0) \in C$, $\frac{df}{dy}(x_0, y_0) \neq 0$ gibt es Intervalle I_1, I_2

$$C \cap (I_1 \times I_2) = \{ (x, y(x)) \mid x \in I_1 \}$$

Insbesondere existiert ein $y(x)$ auf I_2, s.d. :

$$f(x, y(x)) = 0$$

$$y'(x) = -\frac{f_x(x, y(x))}{f_y(x, y(x))}$$

Allgemeiner Satz über implizite Funktionen

$$f = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) \end{bmatrix}, \quad S: \{ f_1(x) = \dots = f_m(x) = 0 \}$$

y_i $existieren, falls$: $$\det \begin{pmatrix} \frac{d f_1}{d x_{n+1}} & \dots & \frac{d f_1}{d x_{n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d f_m}{d x_{n+m}} & \dots & \frac{d f_m}{d x_{n+m}} \end{pmatrix} = 0$$

Satz über Umkehrfunktionen

$$y = f(x): \quad C = \{ (x,y) \mid F(x,y) = 0 = y - f(x) \}$$

$$Wegen\ f_y(x_0) \neq 0: \exists\ um\ y_0\ F(g(y), y) = y - f(g(y))$$

$$g'(y_0) = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Korollar : Niveaulinie

$$z_0 : (x_0, y_0)\ regulärer\ Punkt: grad\ f(z_0) \neq 0$$
$$f(z_0) = A$$

$$Niveaulinie\ f^{-1}(A) = \{ (x,y) \mid f(x,y) = A \}$$

$$f^{-1}(A) glatt, \quad \nabla f(z_0)\ steht\ senkrecht\ auf\ Tangente$$

Die Funktionalmatrix (Jakobi)

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

$$Df(p) := \left[\frac{df}{dx}\right]_p = \begin{bmatrix} \frac{d f_1}{d x_1} & \dots & \frac{d f_1}{d x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d f_m}{d x_1} & \dots & \frac{d f_m}{d x_n} \end{bmatrix}(p) = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{pmatrix}$$

Die lineare Approximation von f bei $\overrightarrow{x_0}$ ist:

$$f(\vec{x}) = f(\overrightarrow{x_0}) + \left[\frac{df}{dx}\right]_p * (\vec{x} - \overrightarrow{x_0}) + o(|(\vec{x} - \overrightarrow{x_0})|)$$

Kettenregel

$$y: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, z: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s : \varphi(x) = z(y(x))$$

$$\left[\frac{d\varphi}{dx}\right]_p = \left[\frac{dz}{dx}\right]_{y(p)} * \left[\frac{dy}{dx}\right]_p$$

Funktionaldeterminante: singulär / regulär

$$J_f(p) := det \left[\frac{df}{dx}\right]_p$$

f heisst **regulär**, falls maximaler Rang

$$rang \left[\frac{df}{dx}\right]_p = \min(m, n), \qquad det \left[\frac{df}{dx}\right]_p \neq 0$$

Satz über die Umkehrfunktion

Für $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ regulär gilt:

$$\left[\frac{d f^{-1}}{dx}\right]_{f(p)} = \left[\frac{df}{dx}\right]_p^{-1}$$

9. Vektoranalysis

Gradientenfeld von f: $\vec{K}(x,y) = \binom{P(x,y)}{Q(x,y)} = (\nabla f)(x)$

Singulärer Punkt: Nullstelle des Vektorfelds

Feldlinie: Kurve, die in jedem Punkt parallel zu Vektorfeld

Löse das Diff.gl.system

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \vec{v}(\vec{x}(t))$$

In n = 2

$$y'(x) = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$$

Potential des Vektorfelds: Sei $p_0 \in \Omega, \gamma\ ein\ Weg\ zw. p_0\ u. p$

$$f(p) = \int_{p_0}^{p} \vec{K}\, d\vec{x} = \int_\gamma \vec{K}\, d\vec{x} \to \vec{K} = \nabla f$$

Konservatives Vektorfeld

Alle **Gradientenfelder sind konservativ**: $\vec{K} = \nabla f$

Haben γ_1, γ_2 dieselben Anfangs- und Endpunkte, so gilt

$$\int_{\gamma_1} \vec{K}\, d\vec{x} = \int_{\gamma_2} \vec{K}\, d\vec{x} = f(x_{Ende}) - f(x_{Start})$$

Für eine geschlossene Kurve in Ω gilt: $\oint_\gamma \vec{K}\, d\vec{x} = 0$

Eine notwendige Bedingung, dass K konservativ:

$$\frac{d K_i}{d x_j} = \frac{d K_j}{d x_i}, \quad i \neq j$$

Ist Ω *einfach zusammenhängend*, gilt:

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{dP}{dy} \leftrightarrow \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) = 0\ für\ K\ konservativ$$

$$K\ konservativ \leftrightarrow rot(K) = 0$$

<u>Linienintegral: *Zirkulation*</u>

<u>Skalares Linienintegral (Länge -> f = 1)</u>

$$\int_\gamma f\, d|l| = \int_a^b f((\vec{\gamma}(t)) * |\vec{\gamma}'(t)|\, dt$$

<u>Vektorielles Linienintegral</u>

$$\int_\gamma \vec{K}\, d\vec{x} = \int_a^b \vec{K}(\vec{\gamma}(t)) * \vec{\gamma}'(t)\, dt$$

$$\int_\gamma \vec{K}\, d\vec{x} = \int_\gamma \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} d\vec{x} = \int_\gamma P\, dx + Q\, dy$$

<u>Flächenintegral: *Fluss*</u>

Immer nur abhängig von 2 Variablen, zB. r, φ

$$\vec{n} = \frac{1}{|\vec{r}_u\, x\, \vec{r}_v|}(\vec{r}_u\, x\, \vec{r}_v), \qquad wobei\ \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

<u>Skalares Flächenintegral</u>

$$\int_S f\, d\vec{\omega} = \int_B f(\, \vec{r}(u,v)\,) * |\vec{r}_u\, x\, \vec{r}_v|\, d\mu(u,v)$$

<u>Flächeninhalt von S = dB</u>

$$\omega(S) = \int_{dB} 1\, d\omega = \int_B |\vec{r}_u\, x\, \vec{r}_v|\ d\mu(u,v)$$

<u>Vektorielles Flächenintegral:</u>

$$\int_B \vec{v}\, d\vec{\omega} = \int_B \vec{v}\ \vec{n}\ d\omega$$

$$= \int_B \vec{v}(\, \vec{r}(u,v)\,) * (\vec{r}_u\, x\, \vec{r}_v)\, d\mu(u,v)$$

$$d\vec{\omega} = \vec{n}\, d\omega = (\vec{r}_u\, x\, \vec{r}_v)\, d\mu(u,v)$$

<u>Satz von Green</u>

Sei B eine Fläche in $\mathbb{R}^2$ und dB der Rand von B

$$\int_{dB} P\, dx + Q\, dy = \iint_B \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) d\mu(x,y)$$

<u>Flächenberechnung</u>

$$\mu(B) = \int_B 1\, d\mu\ = \int_{dB} x\, dy = -\int_{dB} y\, dx$$

Trick: $dx = dx * \frac{dt}{dt} = \frac{dx}{dt}\, dt = x'(t)\, dt$

<u>Satz von Stokes: *Linienint. -> Flächenint.*</u>

Dreidimensionale Verallgemeinerung des Satzes von Green

-> Berechnung der **Zirkulation** im Rand über die Fläche

$$\int_{dS} \vec{K}\, d\vec{s} = \int_S rot\, \vec{K} * \vec{n}\, d\omega$$

<u>Flächenberechnung:</u> $rot\, \vec{K} = 1$

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}\ oder\ \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}\ oder\ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\, y \\ \frac{1}{2}\, x \end{pmatrix}$$

<u>Divergenzsatz / Satz von Gauss: *Fläche -> Volumen*</u>

<u>Tangentialvektor:</u> $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$\vec{\boldsymbol{n}}$ *ist der* ***nach aussen zeigende*** *Normaleneinheitsvektor*

Was am Rand rausfliesst, ist gleich dem im Innern Produzierten

$$\int_{d\Omega} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \vec{n}\, ds = \int_\Omega \left(\frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy}\right) d\mu(x,y)$$

$$= \int_\Omega (div\ \vec{v})\, d\mu(x,y)$$

<u>Arbeit d. VF:</u> $\int < \dot{\gamma}(t),\ V(\gamma(t)) >$

<u>Differentialoperatoren</u>

$$\begin{tikzcd} \text{Vektorfeld} \arrow[r, "\text{rot}"] & \text{Vektorfeld} \arrow[d, "\text{div}"] \\ \text{Skalarfeld} \arrow[u, "\text{grad}"] \arrow[r, "\text{div grad}"'] & \text{Skalarfeld} \end{tikzcd}$$

grad f	∇f	$\begin{bmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \partial_3 f \end{bmatrix}$
rot $\vec{K}$	$\nabla \times \vec{K}$	$\begin{bmatrix} \partial_2 K_3 - \partial_3 K_2 \\ \partial_3 K_1 - \partial_1 K_3 \\ \partial_1 K_2 - \partial_2 K_1 \end{bmatrix}$
div $\vec{K}$	$\nabla \cdot \vec{K}$	$\partial_1 K_1 + \partial_2 K_2 + \partial_3 K_3$
div grad f	Δf	$\partial_1^2 f + \partial_2^2 f + \partial_3^2 f$

$$\Delta f = \nabla * \nabla f$$

<u>Eigenschaften</u>

$$\text{rot grad } f = 0 \qquad \text{div rot } \vec{K} = 0$$

grad $f = 0$	f ist lokal konstant.
rot $\vec{K} = 0$	$\vec{K}$ ist wirbelfrei bzw. lokal $\exists f$ mit grad $f = \vec{K}$.
div $\vec{K} = 0$	$\vec{K}$ ist divergenzfrei bzw. lokal $\exists \vec{L}$ mit rot $\vec{L} = \vec{K}$.
$\Delta f = 0$	f ist harmonisch.

$$rot(\, rot\ \vec{v})) = \nabla\, x\, \nabla\, x\, \vec{v} = grad(div\ \vec{v}) - \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix}$$

10. Verschiedenes

Topologie

Innerer Punkt: Alle Punkte in ε-Umgebung von $a \in A$ müssen auch in A liegen.

Randpunkt: Jede noch so kleine Vollkugel muss A UND $\mathbb{R} \setminus \{A\}$ treffen. ACHTUNG: Muss nicht in A liegen!

δA : Menge aller Randpunkte, „Rand"
$\bar{A}$: Abschluss von A , $= A \cup \delta A$

Falls $\begin{cases} \delta A \subset A : abgeschlossen \rightarrow A = \bar{A} \\ \delta A \not\subset A : \quad offen \quad \rightarrow A = \dot{A} \end{cases}$

Supremum und Infimum

Maximum: $s \in M, \quad s \geq \forall y \in M \rightarrow \quad s = \max(M)$

Oben beschränkt: $\exists\ a \in \mathbb{R} : a \geq x \forall x \in M$

Supremum: kleinste obere Schranke von M

Falls $Supremum\ s \in M$, heisst s auch **globales Maximum**

Kompaktheit

Eine Menge heisst **kompakt**, falls sie abgeschlossen und beschränkt ist. Jedes abgeschlossene Intervall [a,b] ist kompakt.

Konvex und Konkav

$$f''(t) \geq 0 : konvex$$

$$f''(t) \leq 0 : konkav$$

Givens-Rotation

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Binominalkoeffizient: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} ; \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Pascal - Binome und Trinome:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^3 - b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Gamma-Funktion

Interpoliert Fakultätswerte

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\ dt \ , \qquad \alpha > 0$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha * \Gamma(\alpha) \ ; \ \Gamma(n+1) = n! \ , \ n \in \mathbb{N}$$

Logarithmus

$$log_a(x) = \frac{log_b\ (x)}{log_b\ (a)}$$

Kreis / Kugel

Kreis: $\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2}$

$$Umfang: \ 2\pi\, r \qquad Fläche: \quad \pi\, r^2$$

Kugel: $\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 = r^2}$

$$Fläche: \ 4\pi\, r^2 \qquad Volumen: \ \frac{4\pi}{3}\ r^3$$

Partialbruchzerlegung

1. Polynomdivision, so dass

$$F(x) = P(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \ , \qquad Grad(r) < Grad(q)$$

2. Nullstellen $a_1, \ldots, a_n$ von q(x) finden:

Reelle Nullstellen n-ter Ordnung:

$$\frac{A_1}{(x - a_k)} + \frac{A_2}{(x - a_k)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x - a_k)^n}$$

Paar komplexer Nullstellen n-ter Ordnung:

$$\frac{B_1 x + C_1}{(x - a_k)(x - \overline{a_k})} + \ldots + \frac{B_n x + C_n}{[(x - a_k)(x - \overline{a_k})]^n} +$$

$$(x - a_k)(x - \overline{a_k}) = (x - Re)^2 + Im^2$$

4. Beide Seiten auf gemeinsamen Nenner -> **Koeffizientenvergleich**

(Einfache reelle NS: $A = \lim_{x \to a} (x - a) * \frac{r(x)}{q(x)}$)

5. Integration:

$$\int \frac{A_n}{(x - a_k)^n} = -\frac{1}{n-1} * \frac{A_n}{(x - a_k)^{n-1}}$$

$$\int \frac{Bx + C}{(x - Re)^2 + Im^2} = c_1 * \int \frac{\frac{d}{dx}[\ (x - Re)^2 + Im^2]}{(x - Re)^2 + Im^2} + \ c_2 * \int \frac{1}{(x - Re)^2 + Im^2}$$

$$\rightarrow 1. \ \log(\ (x - Re)^2 + Im^2) \quad ; \ 2. \ Subst: t = \frac{x - Re}{Im}$$

Eigenwertproblem

Lösen des charakteristischen Polynoms chp(λ) :

$$\det(A - \lambda\, I_n\ ) = 0$$

Bei einer Dreiecksmatrix sind die EW in der Diagonalen.

11. Tabellen

$$\tan' x = 1 + \tan^2 x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$2 * \cos(x)^2 * \sin(x)^2 = \frac{1}{2}\sin(2x)^2$$

Grad	Rad	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\tan\varphi$
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{1}{2}\pi$	1	0	
120°	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
150°	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
180°	π	0	-1	0

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

Grenzwerte

$$\lim_{x\to\infty} a^x = 0 \qquad (|a| < 1)$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{a} = 1 \qquad (a \in \mathbb{R}^+)$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x!} = 0 \qquad (a \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \mathrm{e}^a \qquad (a \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a \qquad (a \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a \qquad (a \in \mathbb{R}^+)$$

$$\lim_{x\to\infty+} \left[x(\log x)^n\right] = 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^n}{x} = 0 = 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Doppelwinkel-Funktionen

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi \qquad \sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\varphi)$$

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \qquad \cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\varphi)$$

$$\tan 2\varphi = \frac{2\tan\varphi}{1 - \tan^2\varphi} \qquad \tan^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos\varphi}{1 + \cos\varphi}$$

$$1 - \cos 2\varphi = 2\sin^2\varphi$$

$$1 + \cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi$$

Reihenentwicklungen

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$$

$$(1 + x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k}x^k$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\operatorname{artanh} x = x + \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Summe der ersten n-Zahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Ableitungen

Potenz- und Exponentialfunktionen			Trigonometrische Funktionen		Hyperbolische Funktionen	
$f(x)$	$f'(x)$	Bedingung	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$	$\sin x$	$\cos x$	$\sinh x$	$\cosh x$
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{Z}_{<0},\ x \neq 0$	$\cos x$	$-\sin x$	$\cosh x$	$\sinh x$
x^a	ax^{a-1}	$a \in \mathbb{R},\ x > 0$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\log x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
e^x	e^x		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
a^x	$a^x \cdot \log a$	$a > 0$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Stammfunktionen

$f(x)$	$F(x)$	Bedingung	$f(x)$	$F(x)$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$	$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$n \in \mathbb{Z}_{\leq -2},\ x \neq 0$	$\tan x$	$-\log\lvert\cos x\rvert$
x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$	$a \in \mathbb{R},\ a \neq -1,\ x > 0$	$\tanh x$	$\log(\cosh x)$
$\log x$	$x\log x - x$	$x > 0$	$\sin^2 x$	$\frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$
e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax}$	$a \neq 0$	$\cos^2 x$	$\frac{1}{2}(x + \sin x \cos x)$
a^x	$\frac{a^x}{\log a}$	$a > 0,\ a \neq 1$	$\tan^2 x$	$\tan x - x$

Standart-Substitutionen

Integral	Substitution	Ableitung	Bemerkung
$\int f(x, x^2+1)\,dx$	$x = \tan t$	$dx = \tan^2 t + 1\,dt$	$t \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$
$\int f(x, \sqrt{ax+b})\,dx$	$x = \frac{t^2-b}{a}$	$dx = \frac{2}{a}t\,dt$	$t \geq 0$
$\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$	$x + \frac{b}{2a} = t$	$dx = dt$	$t \in \mathbb{R}$, quadratische Ergänzung
$\int f(x, \sqrt{a^2-x^2})\,dx$	$x = a\sin t$	$dx = a\cos t\,dt$	$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2},\ 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$
$\int f(x, \sqrt{a^2+x^2})\,dx$	$x = a\sinh t$	$dx = a\cosh t\,dt$	$t \in \mathbb{R},\ 1 + \sinh^2 x = \cosh^2 x$
$\int f(x, \sqrt{x^2-a^2})\,dx$	$x = a\cosh t$	$dx = a\sinh t\,dt$	$t \geq 0,\ \cosh^2 x - 1 = \sinh^2 x$
$\int f(e^x, \sinh x, \cosh x)\,dx$	$e^x = t$	$dx = \frac{1}{t}\,dt$	$t > 0,\ \sinh x = \frac{t^2-1}{2t},\ \cosh x = \frac{t^2+1}{2t}$
$\int f(\sin x, \cos x)\,dx$	$\tan\frac{x}{2} = t$	$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$	$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Ansätze für inhomogene DGL mit konstanten Koeffizienten

Störfunktion $K(t)$	Spektralbedingung	Ansatz für $y_p(x)$
x^r	$0 \notin \operatorname{spec} L$	$A_0 + A_1x + \cdots + A_rx^r$
	$0 \in \operatorname{spec} L$, m-fach	$A_0x^m + A_1x^{m+1} + \cdots + A_rx^{m+r}$
$b_0 + b_1x + \cdots + b_rx^r,\ b_i \in \mathbb{R}$	$0 \notin \operatorname{spec} L$	$A_0 + A_1x + \cdots + A_rx^r$
$e^{\lambda_0 x},\ \lambda_0 \in \mathbb{C}$	$\lambda_0 \notin \operatorname{spec} L$	$Ae^{\lambda_0 x}$
	$\lambda_0 \in \operatorname{spec} L$, m-fach	$Ax^me^{\lambda_0 x}$
$\cos(\omega x),\ \sin(\omega x)$	$\pm i\omega \notin \operatorname{spec} L$	$A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$
	$\pm i\omega \in \operatorname{spec} L$, einfach	$x(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))$
x^2e^{-x}	$-1 \notin \operatorname{spec} L$	$(A_0 + A_1x + A_2x^2)e^{-x}$